

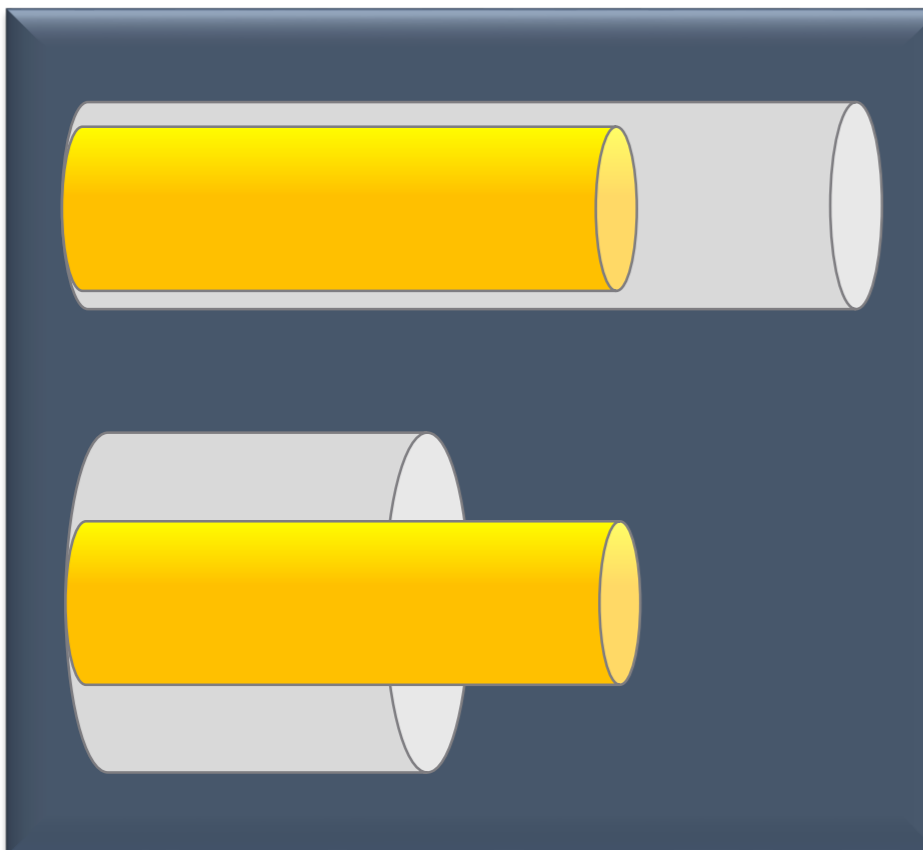
ZGINANIE



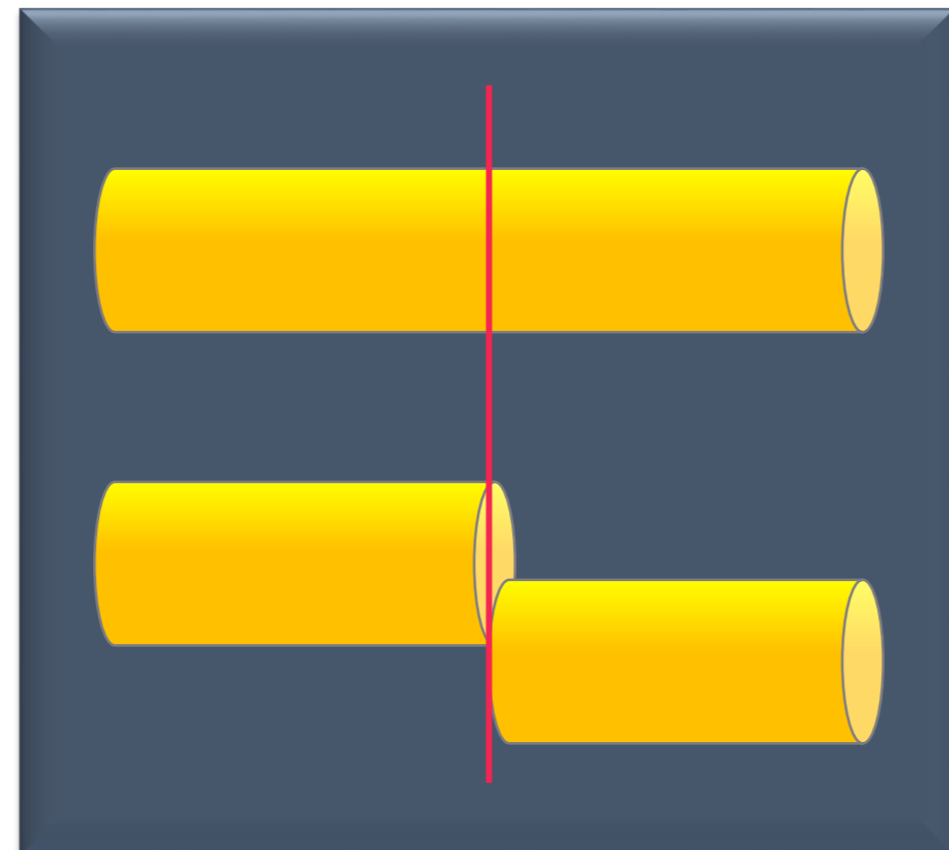


Rodzaje obciążeń

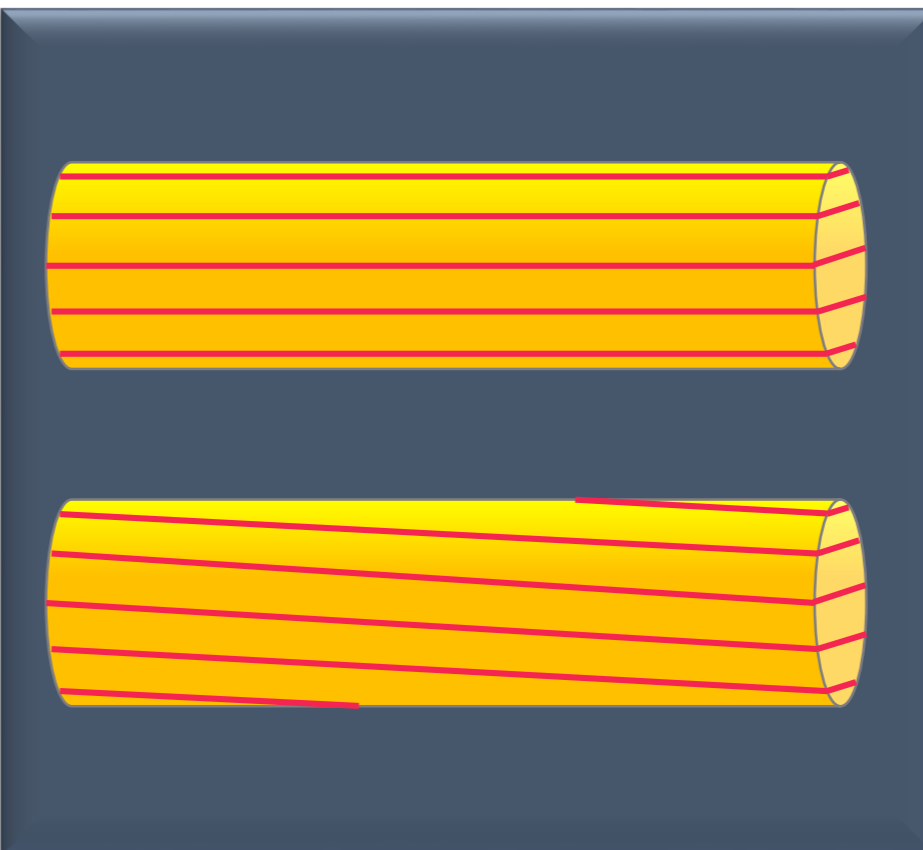
rozciąganie
i ściskanie



ściananie
techniczne

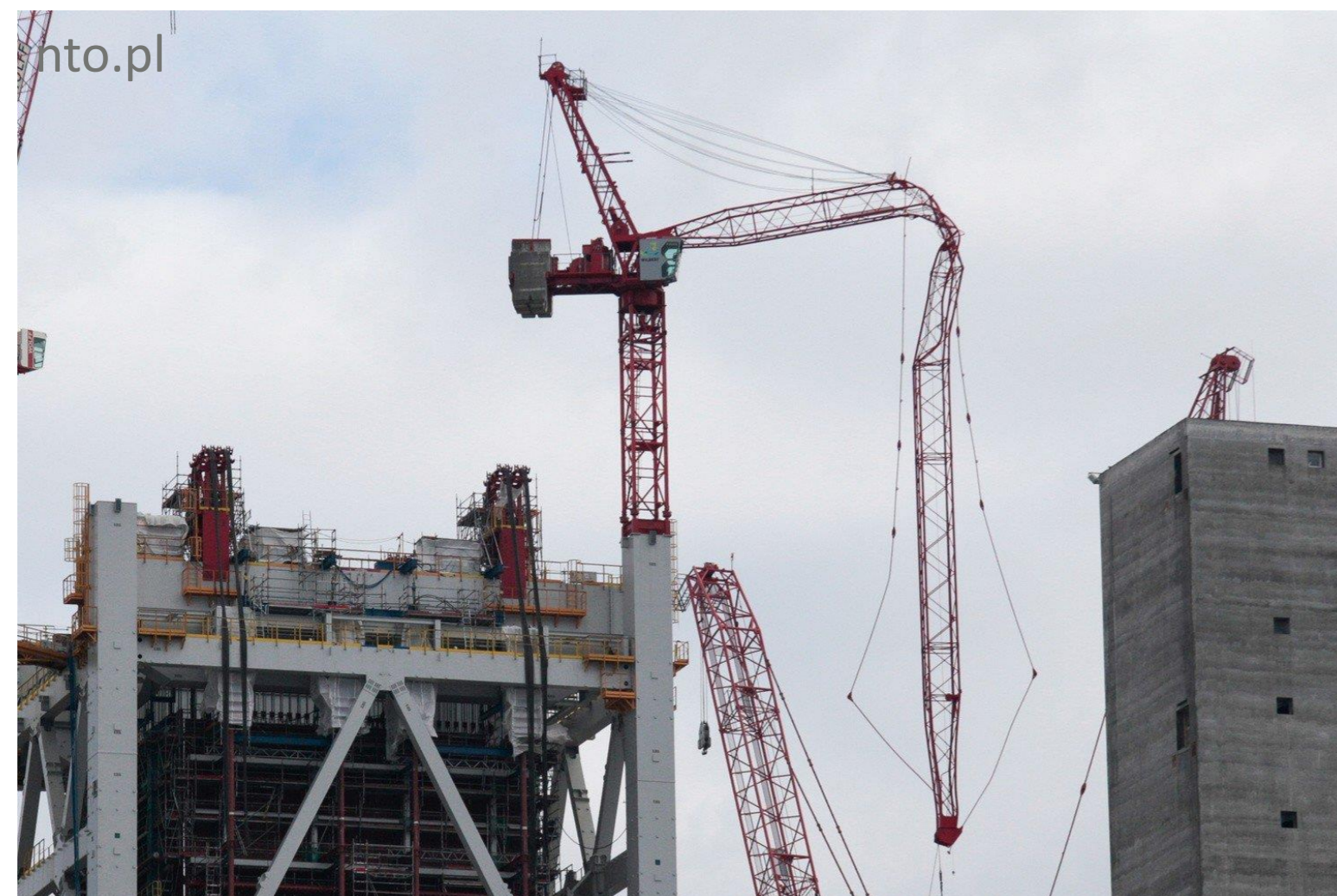


skręcanie

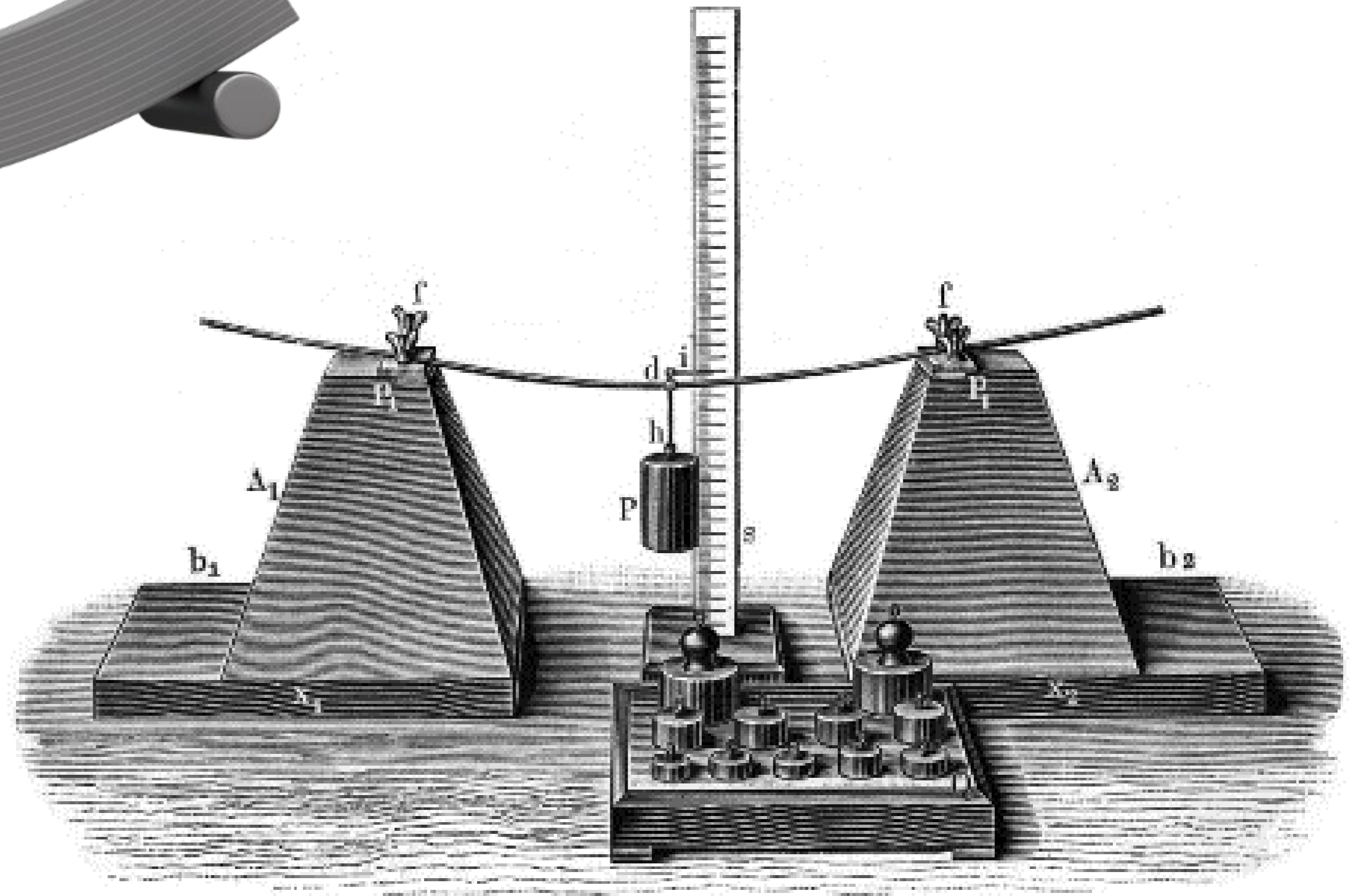
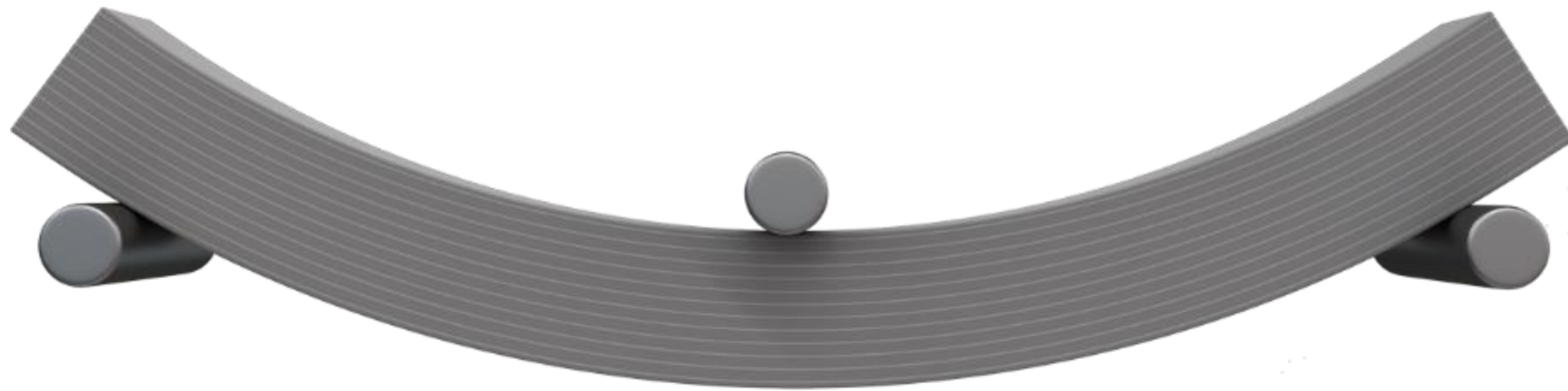


zginanie

ZGINANIE

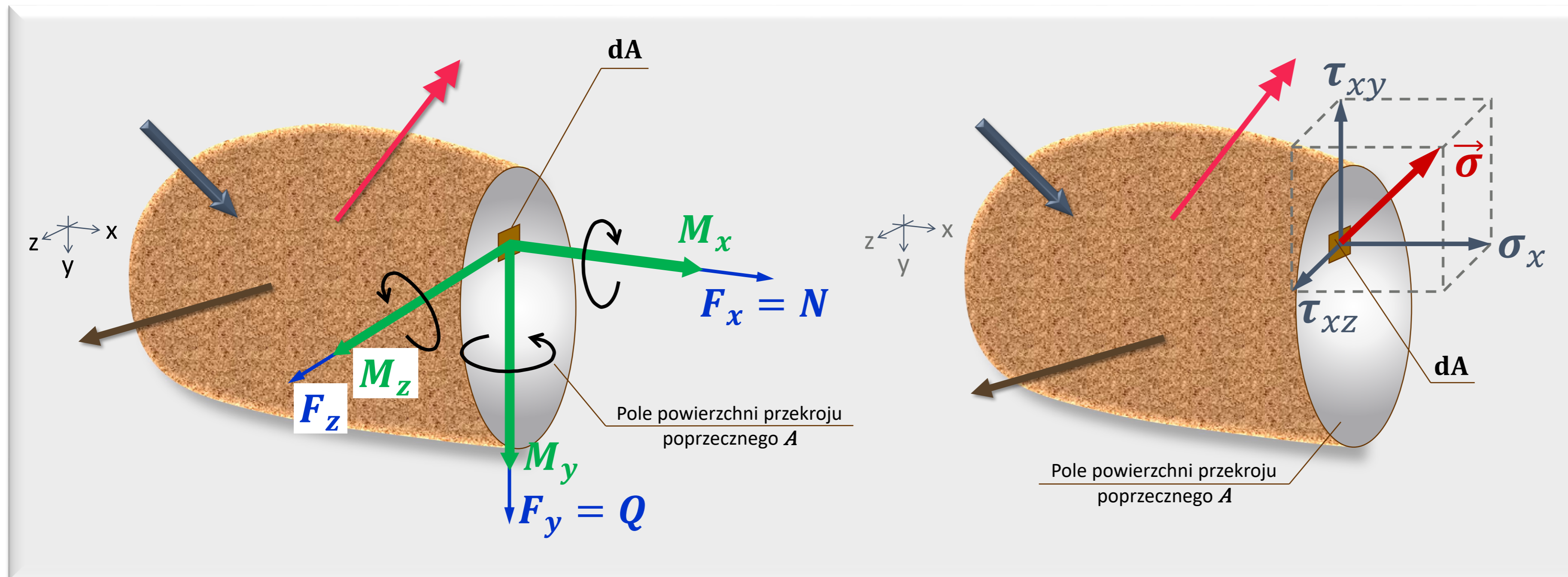


ZGINANIE



ZGINANIE

Siły wewnętrzne i naprężenia



Ostwald M. *Podstawy wytrzymałość materiałów i konstrukcji*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2017 r.

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$F_y = \int_A \tau_{yx} dA$$

$$F_z = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$T = \sqrt{F_y^2 + F_z^2}$$

$$M_s = \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{yx}z) dA$$

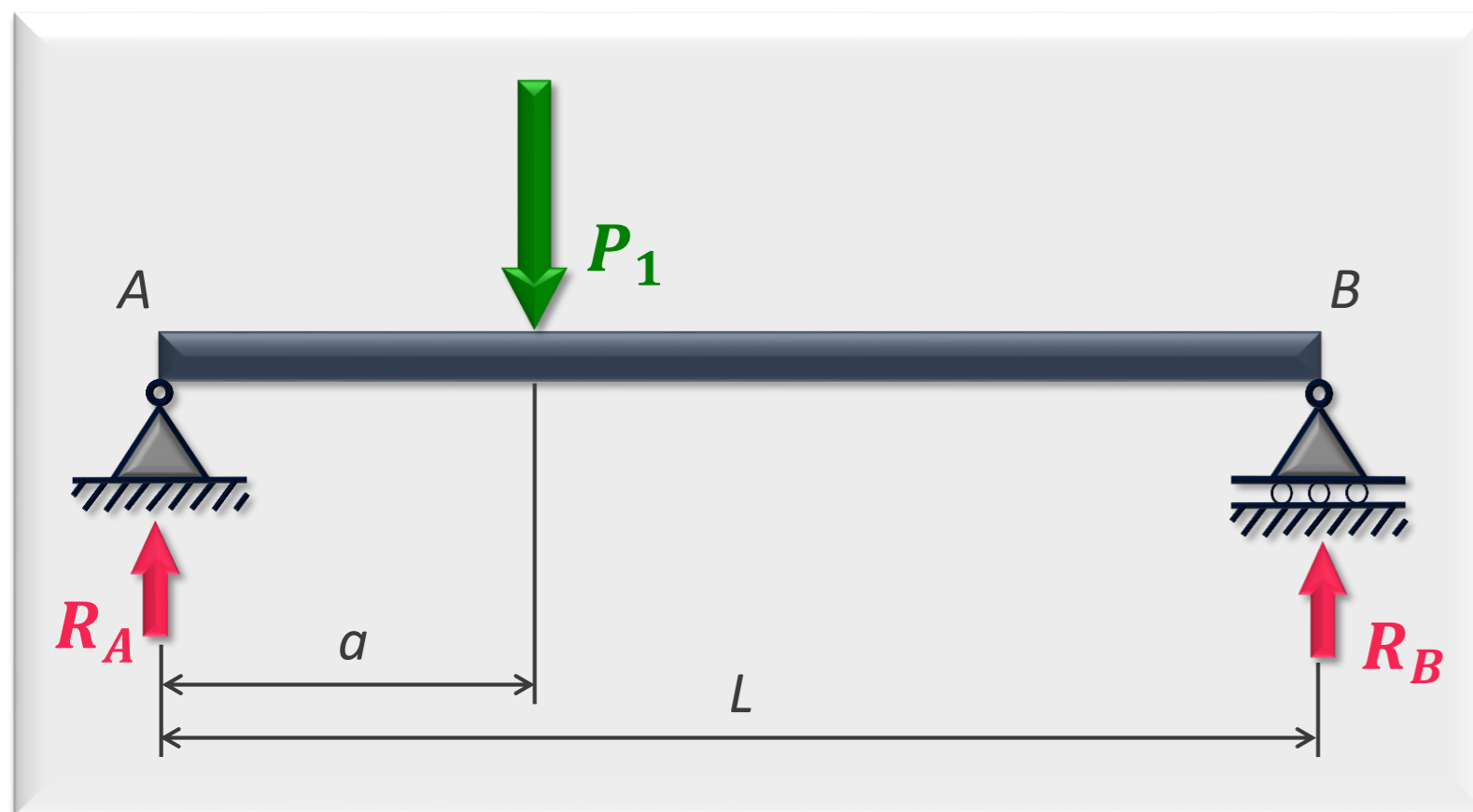
Zginanie

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA$$

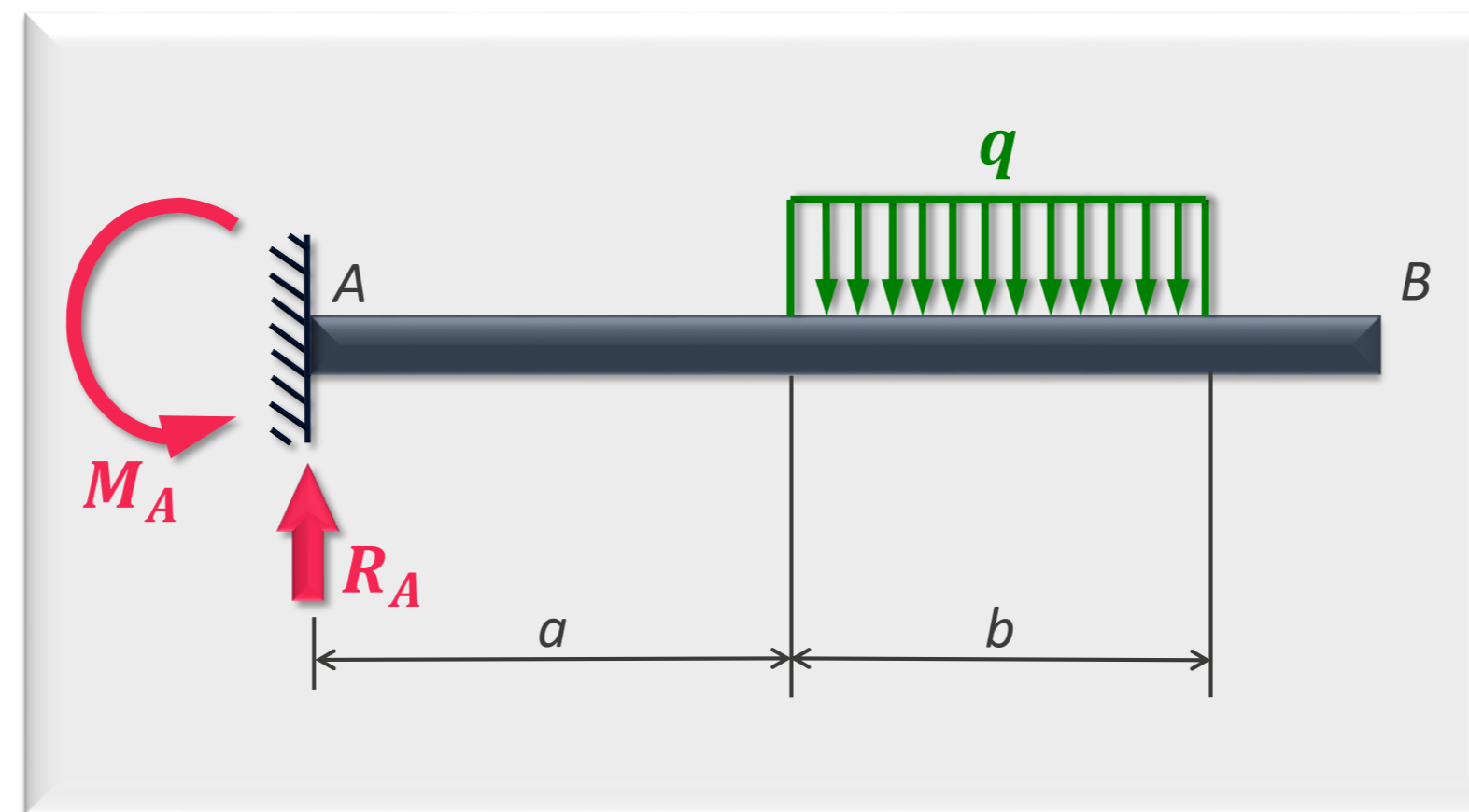
$$M_z = \int_A \sigma_x y dA$$

TYPY BELEK, PODPÓR I OBCIĄŻEŃ

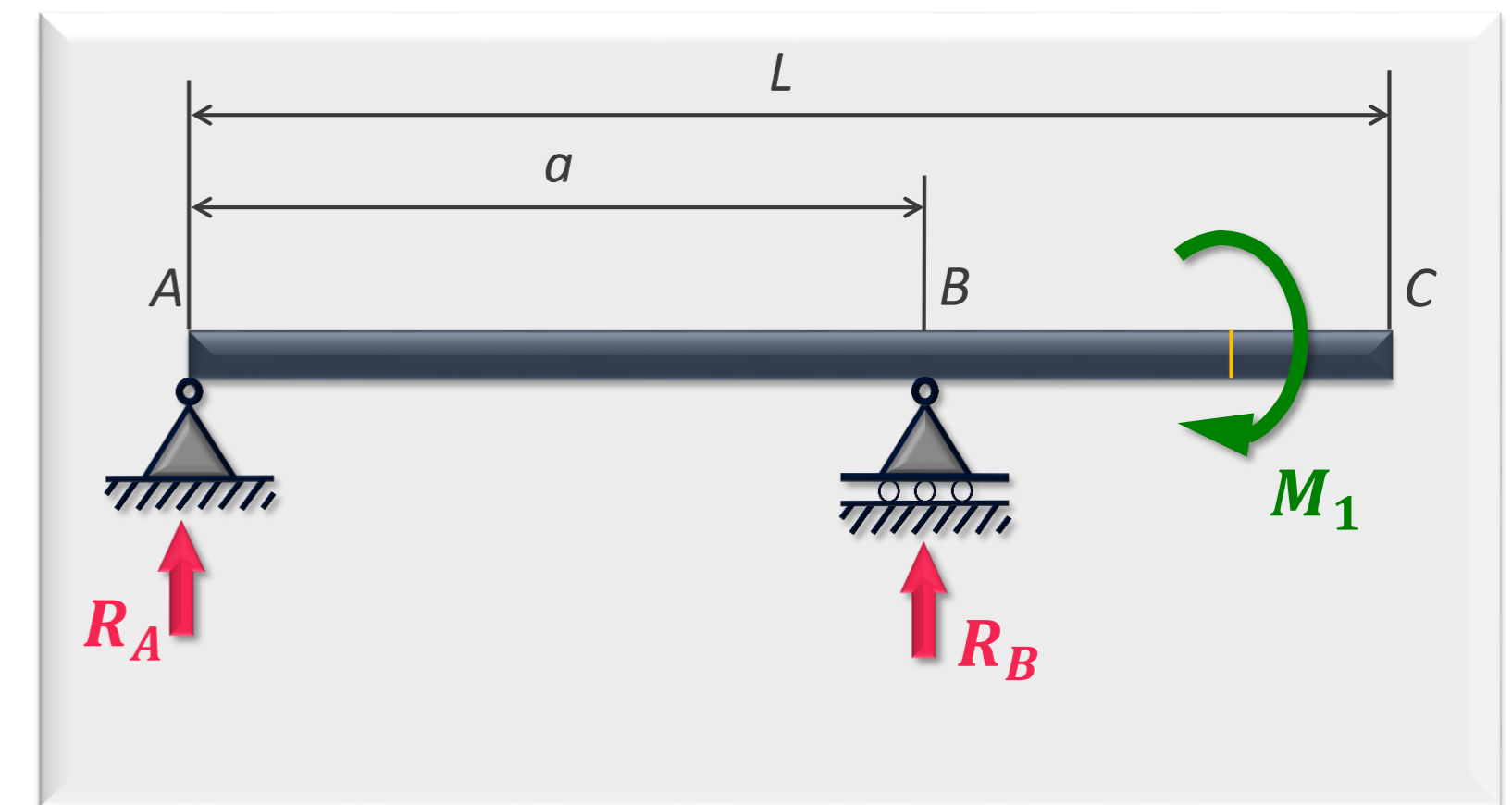
Belka – długi i cienki pręt prosty (element konstrukcyjny) o stałym przekroju poprzecznym, obciążony siłami prostopadłymi do jego osi.



Belka swobodnie podparta



Belka utwierdzona

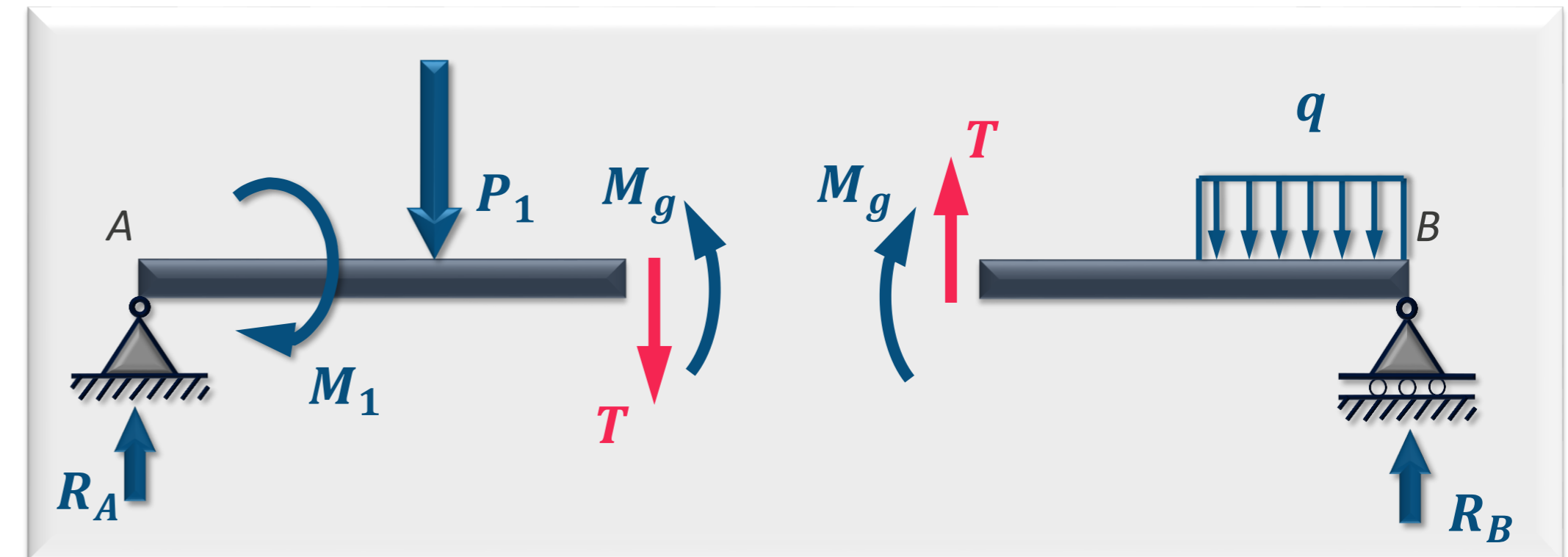
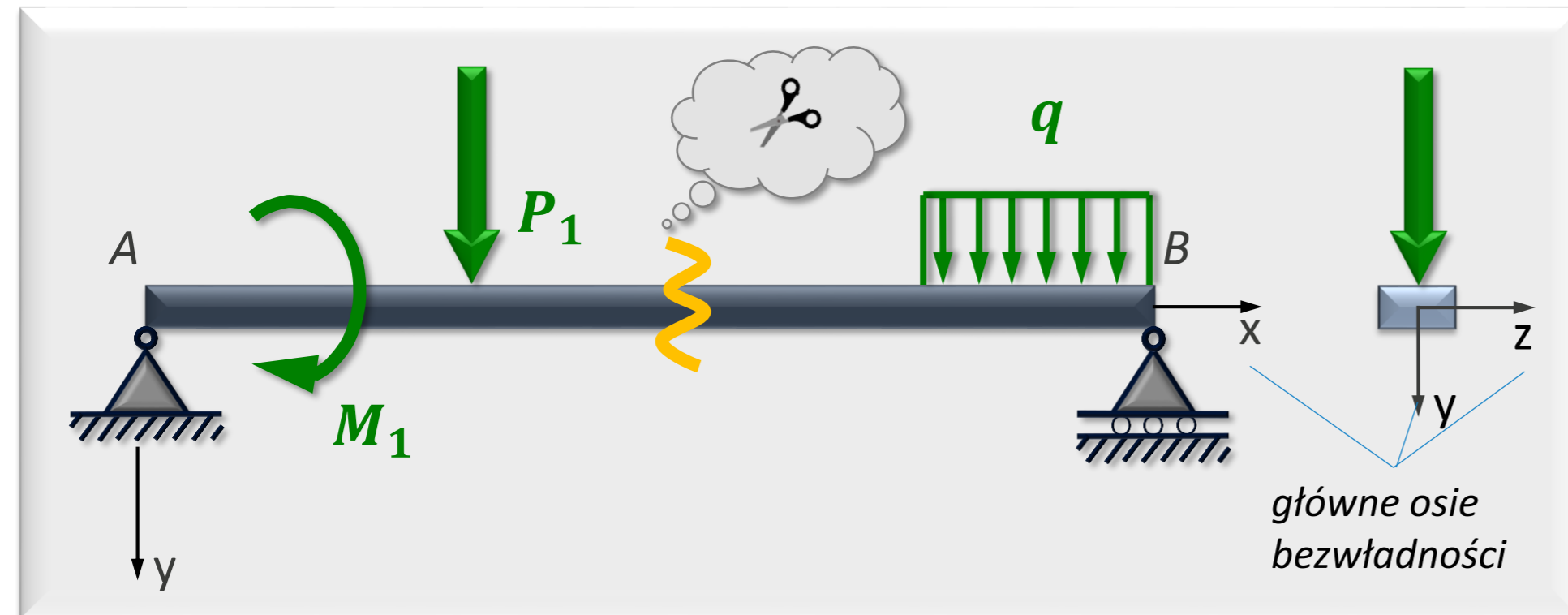


Belka z wysięgnikiem

WYBRANE RODZAJE WIEZÓW

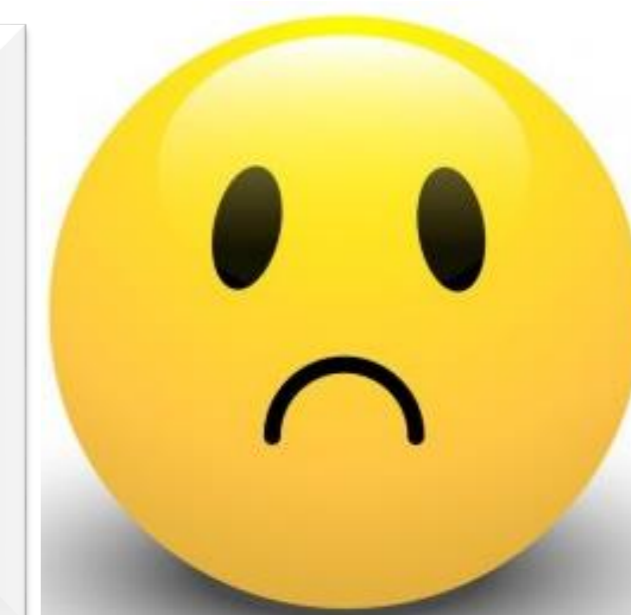
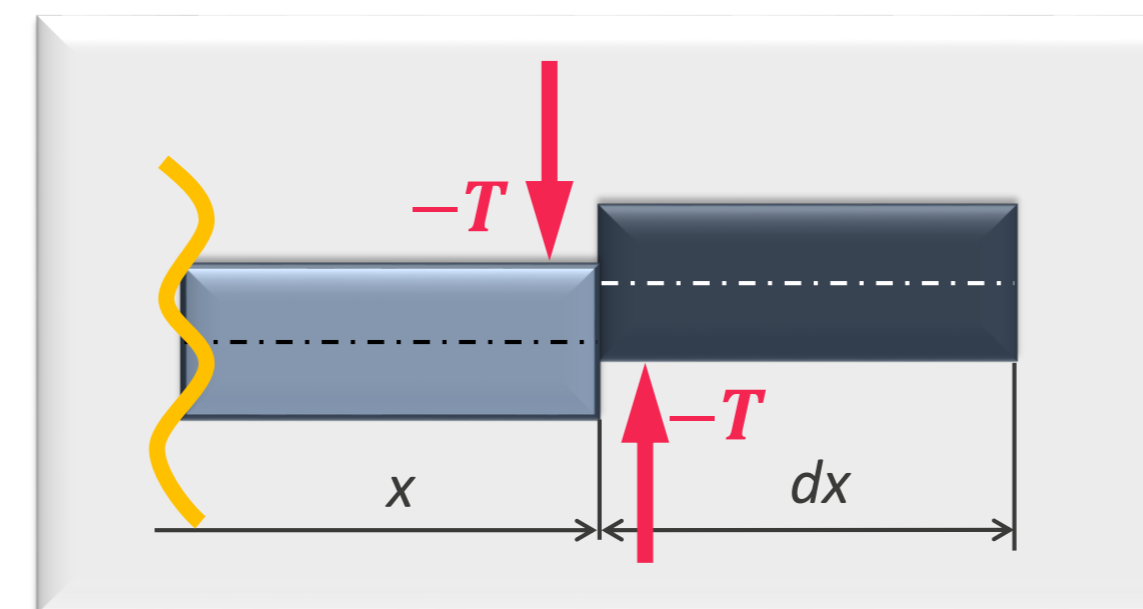
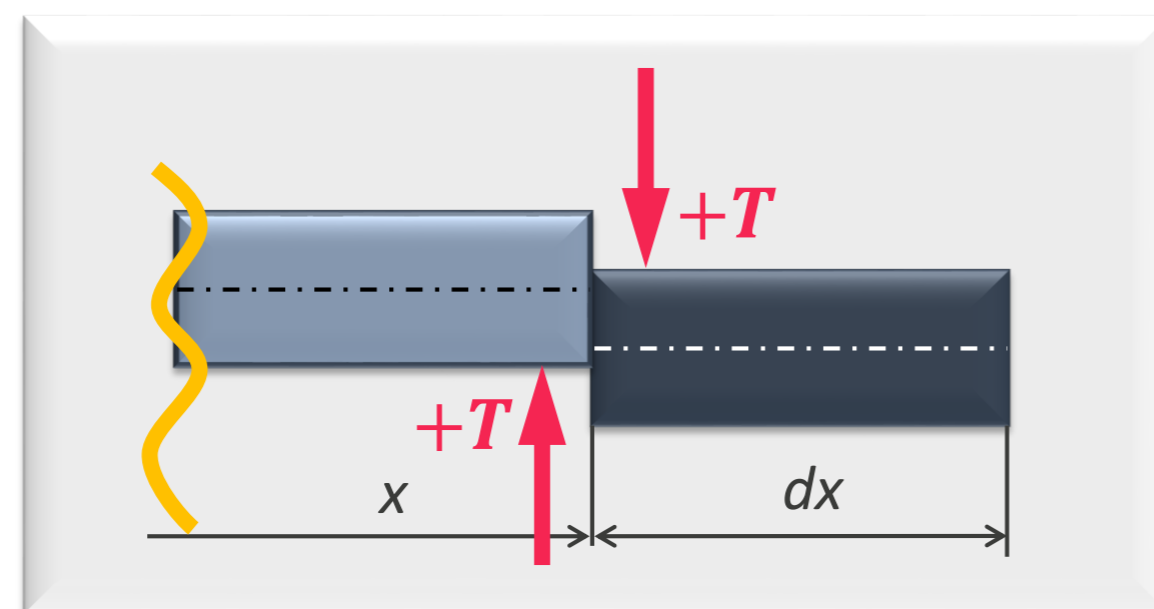
Wiązanie	Więzy rzeczywiste	Reakcje
<p>a) Podpora przegubowa stała</p> <p>Siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji)</p>		
<p>b) Podpora przegubowa przesuwna</p> <p>Reakcja prostopadła do płaszczyzny, po której następuje ruch</p>		
<p>c) Utwierdzenie</p> <p>Moment w utwierdzeniu oraz siła reakcji o dowolnym kierunku</p>		

SIŁA TNĄCA

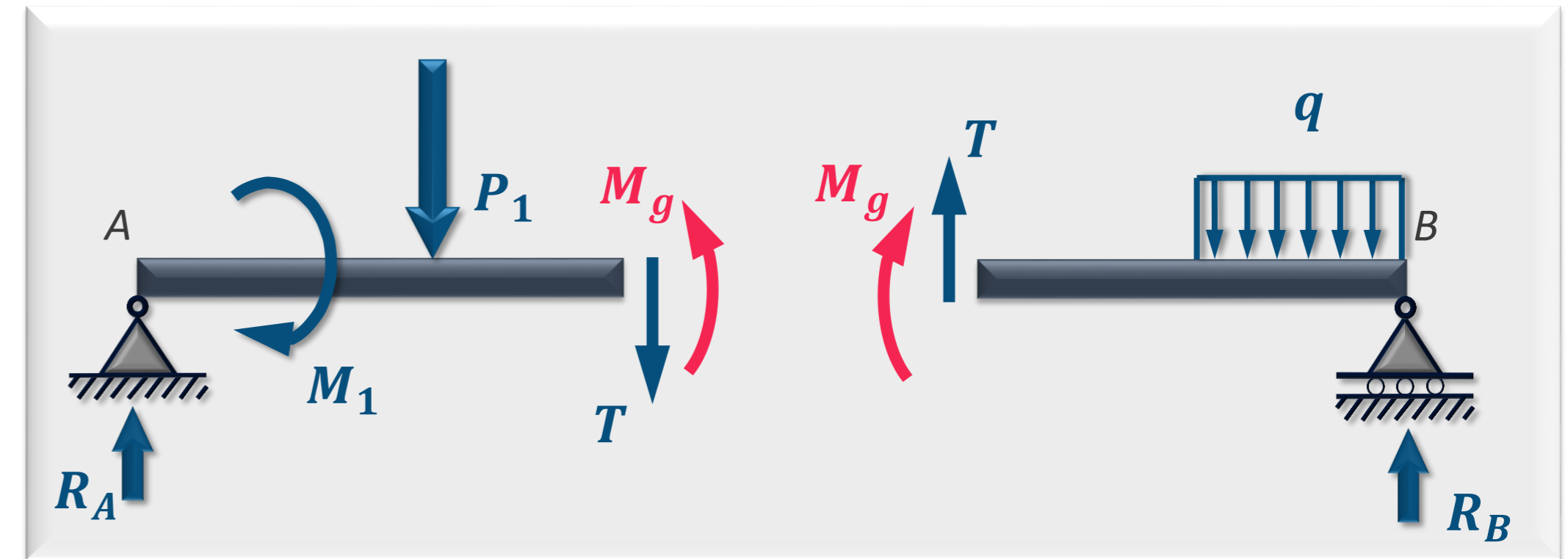
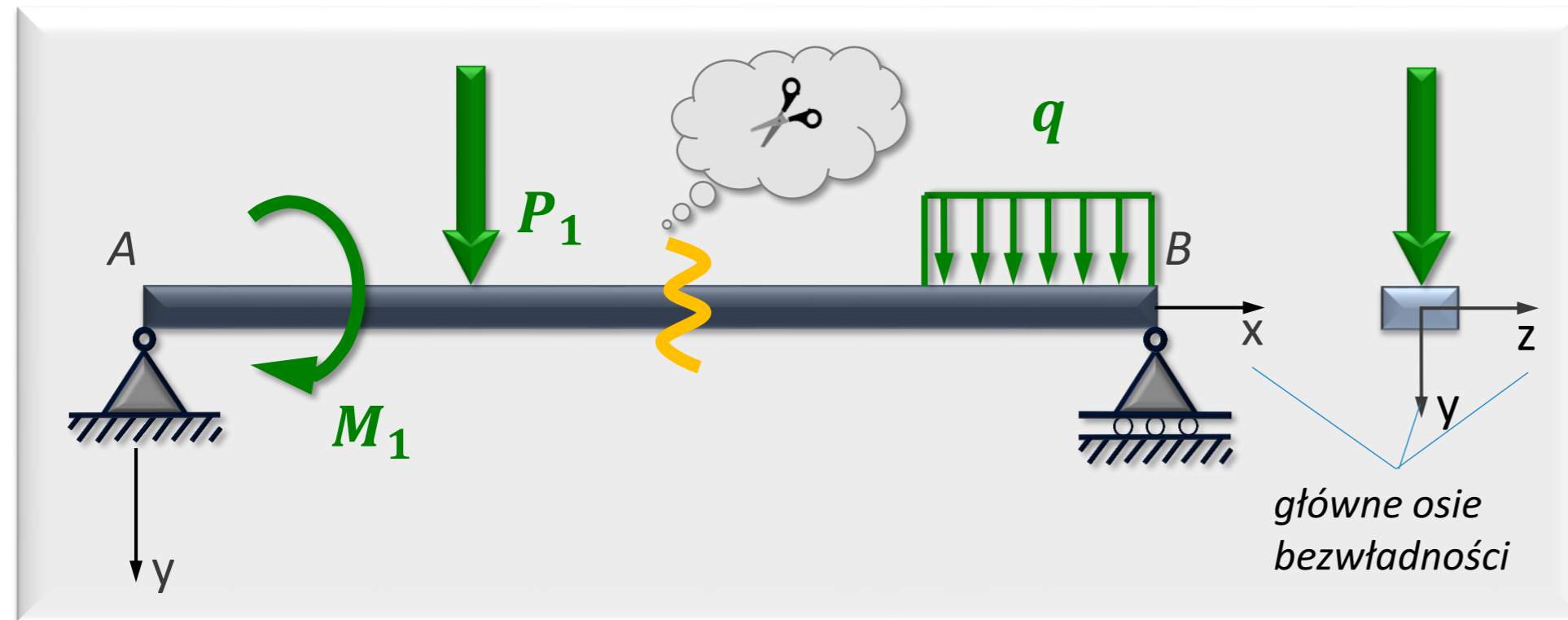


Definicja

Siła tnąca $T(x)$ w dowolnym przekroju zginanej belki – algebraiczna suma rzutów wszystkich sił zewnętrznych i reakcji podporowych na kierunku prostopadły do osi belki po jednej stronie rozpatrywanego przekroju

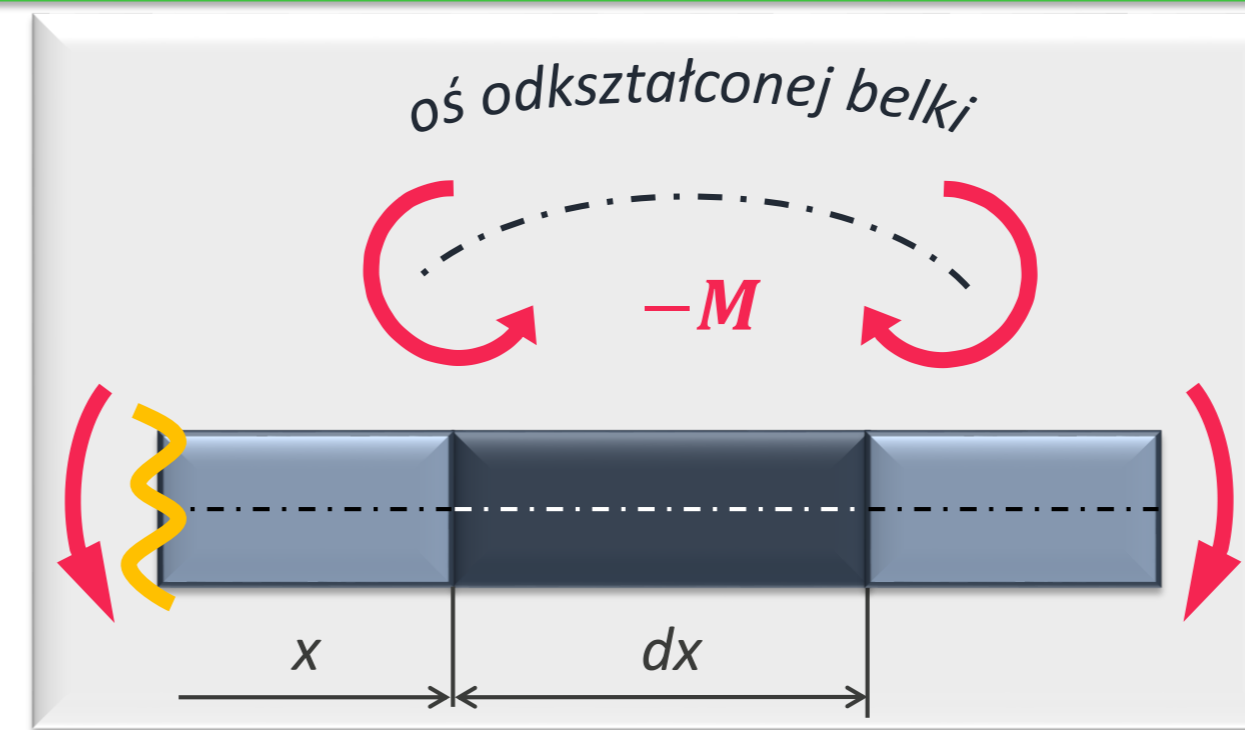
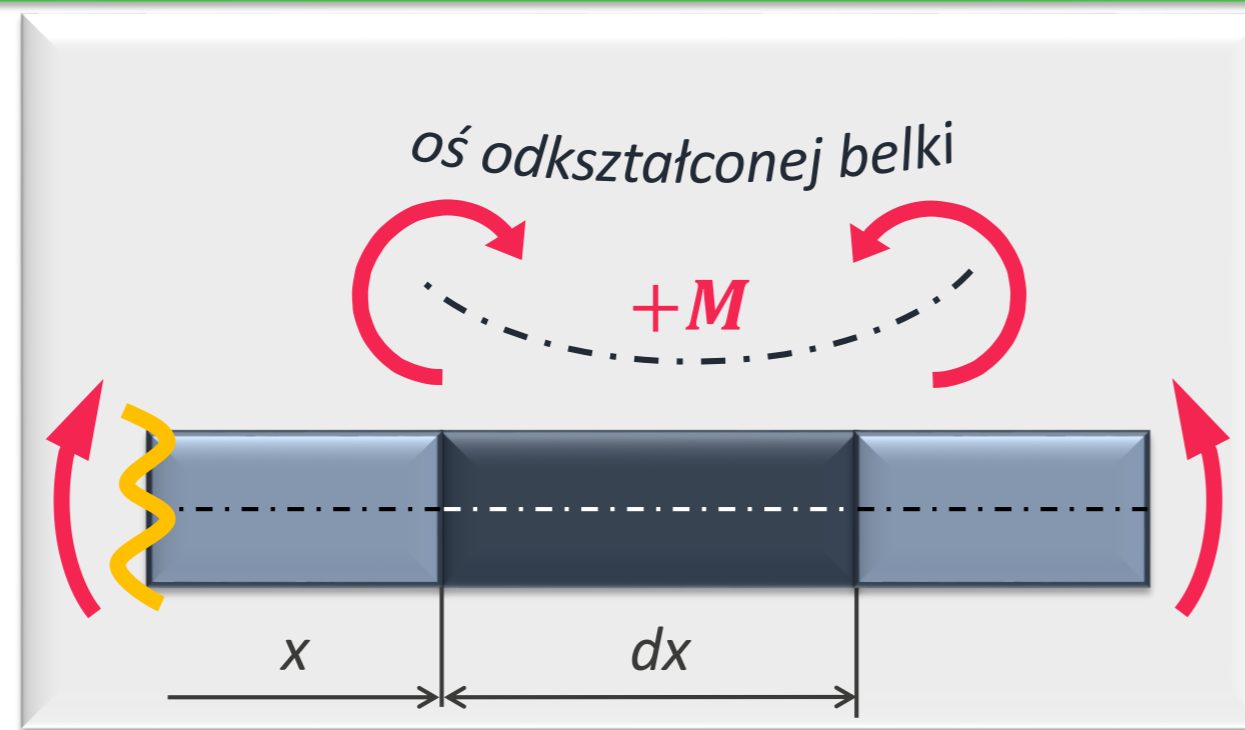


MOMENT GNĄCY



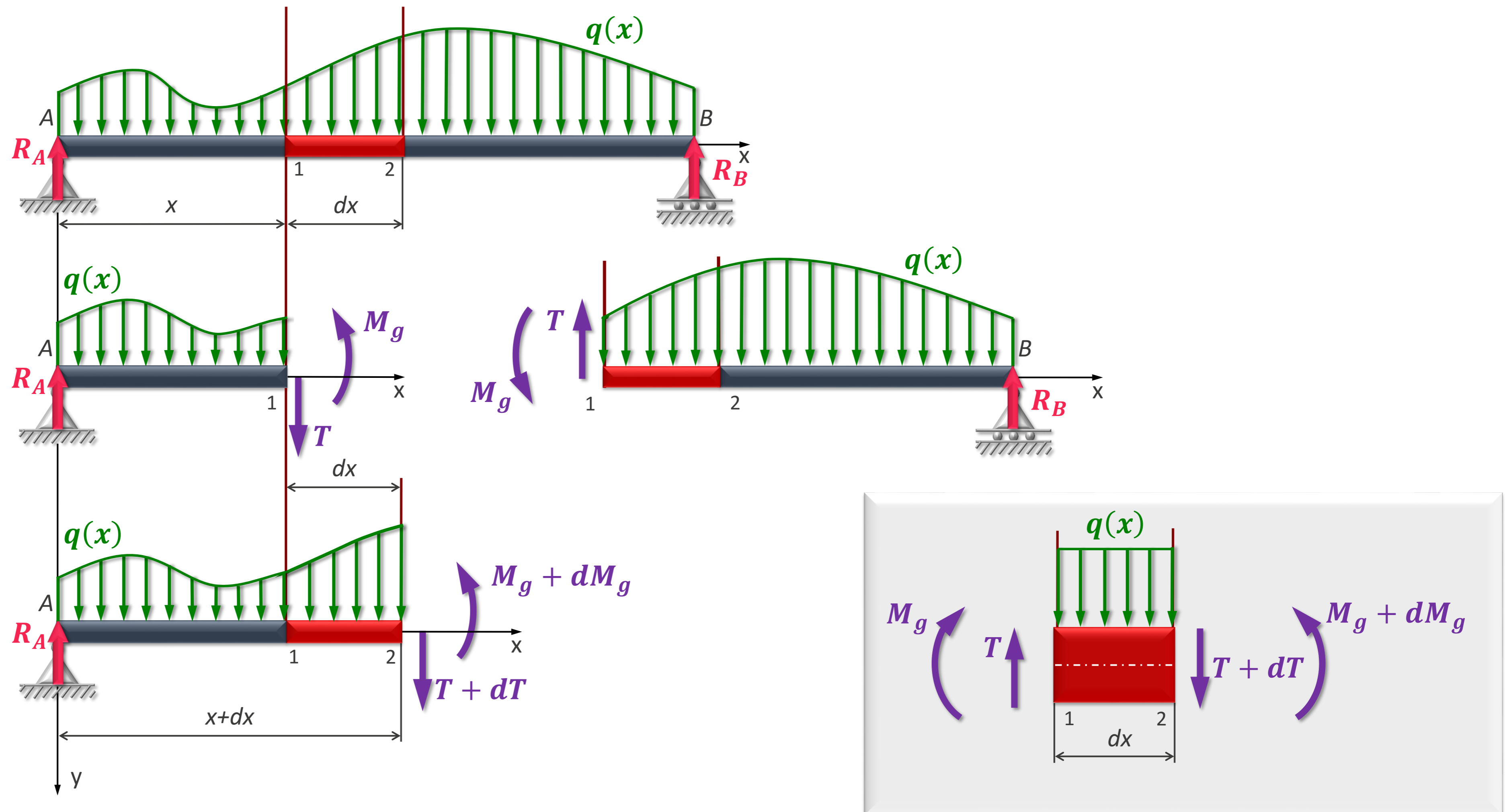
Definicja

Moment gnący $M(x)$ w dowolnym przekroju zginanej belki – algebraiczna suma momentów od wszystkich sił zewnętrznych i reakcji podporowych po jednej stronie rozpatrywanego przekroju



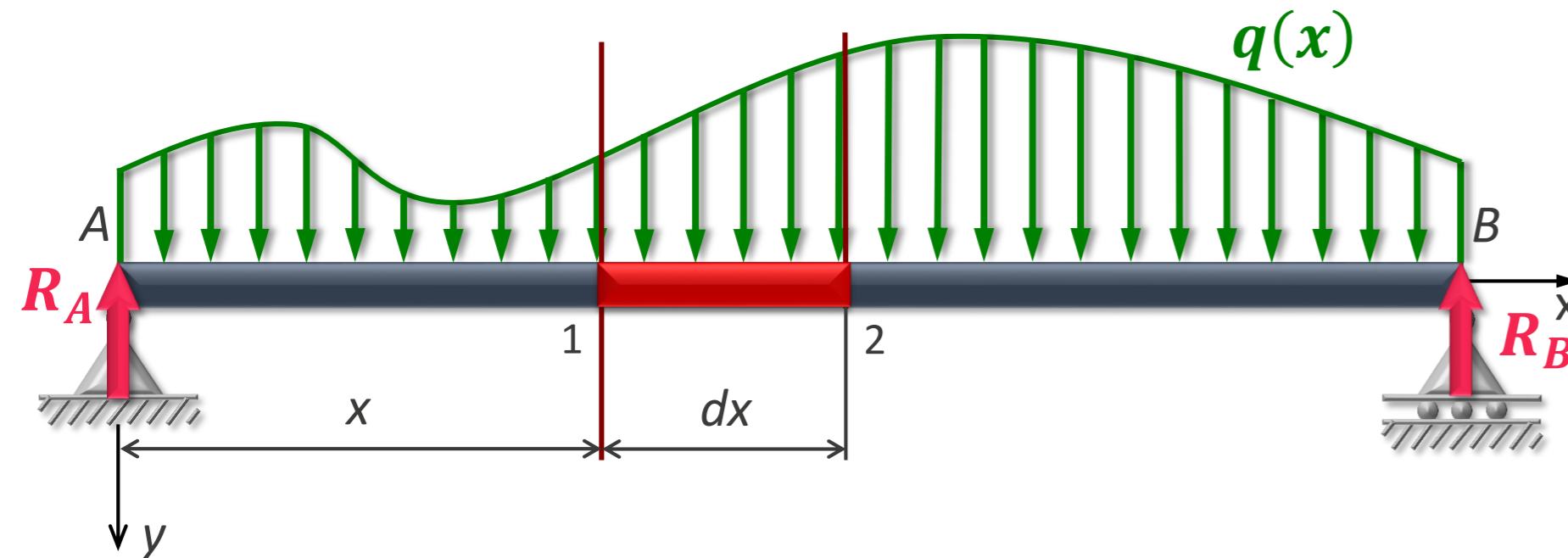
ZGINANIE

Zależności między obciążeniem ciągłym a siłą tnącą



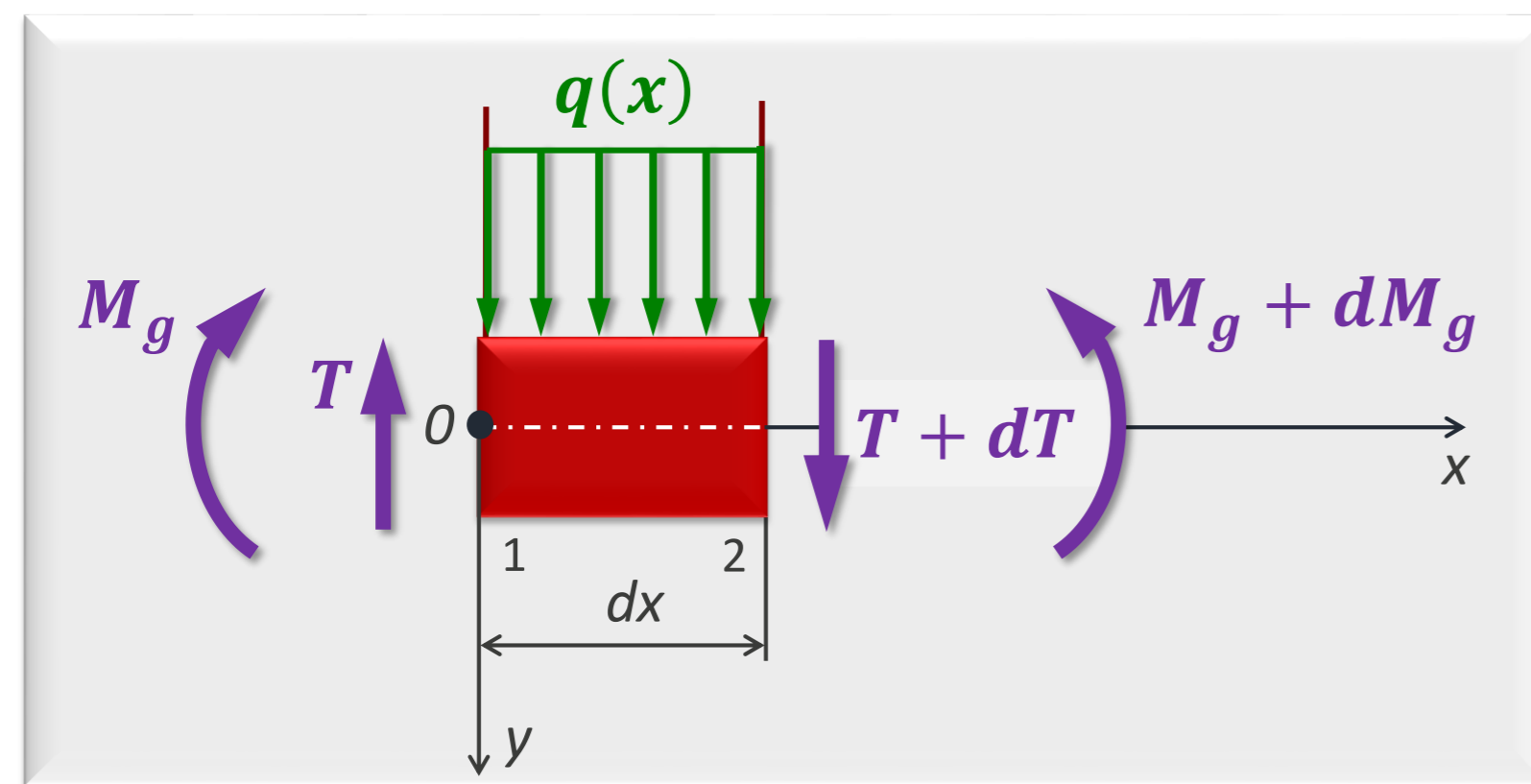
SIŁA TNĄCA

Zależności między obciążeniem ciągłym a siłą tnącą



Warunek równowagi układu sił dla belki o elementarnej długości dx

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\cancel{T} + q(x)dx + \cancel{T} + dT = 0$$

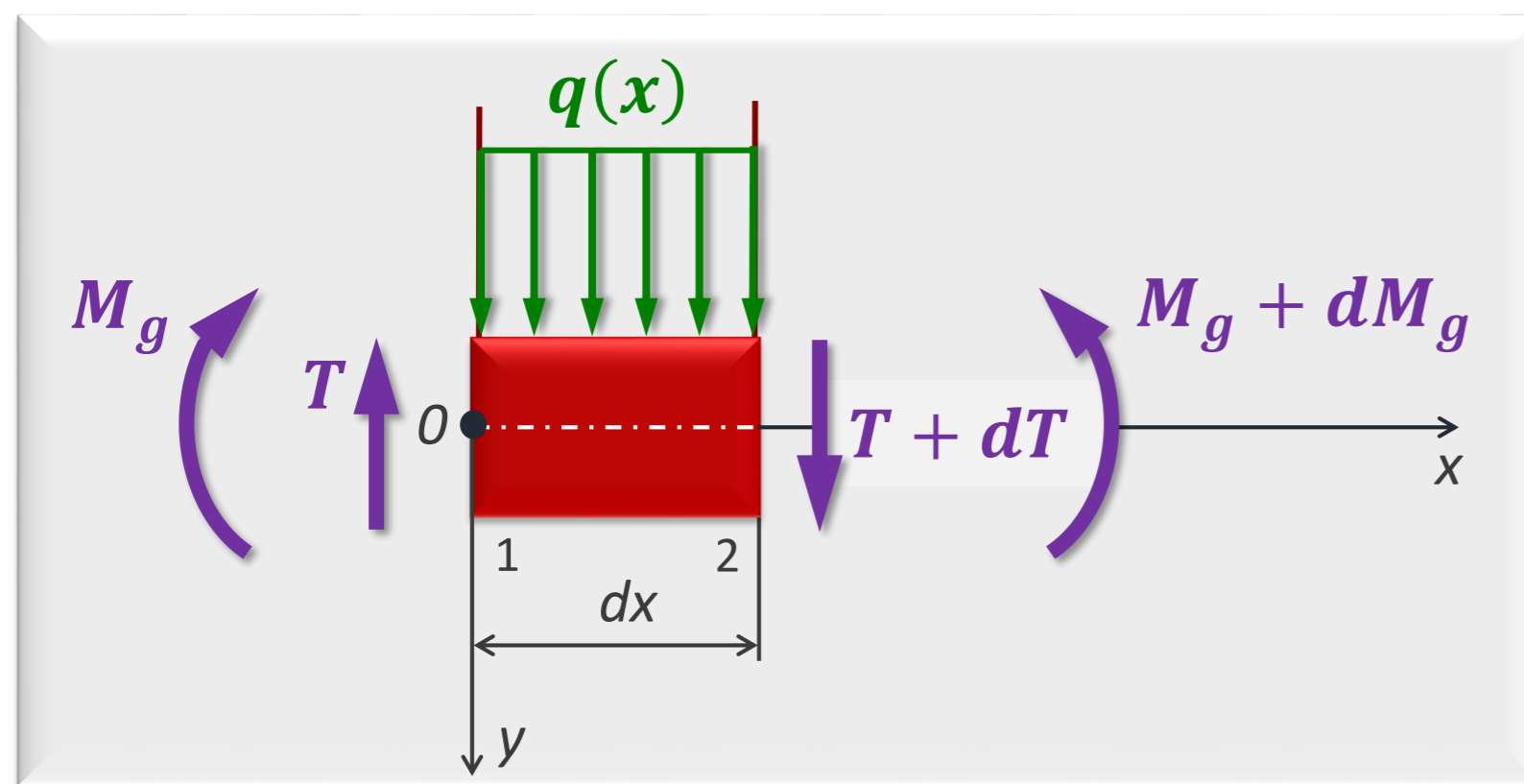
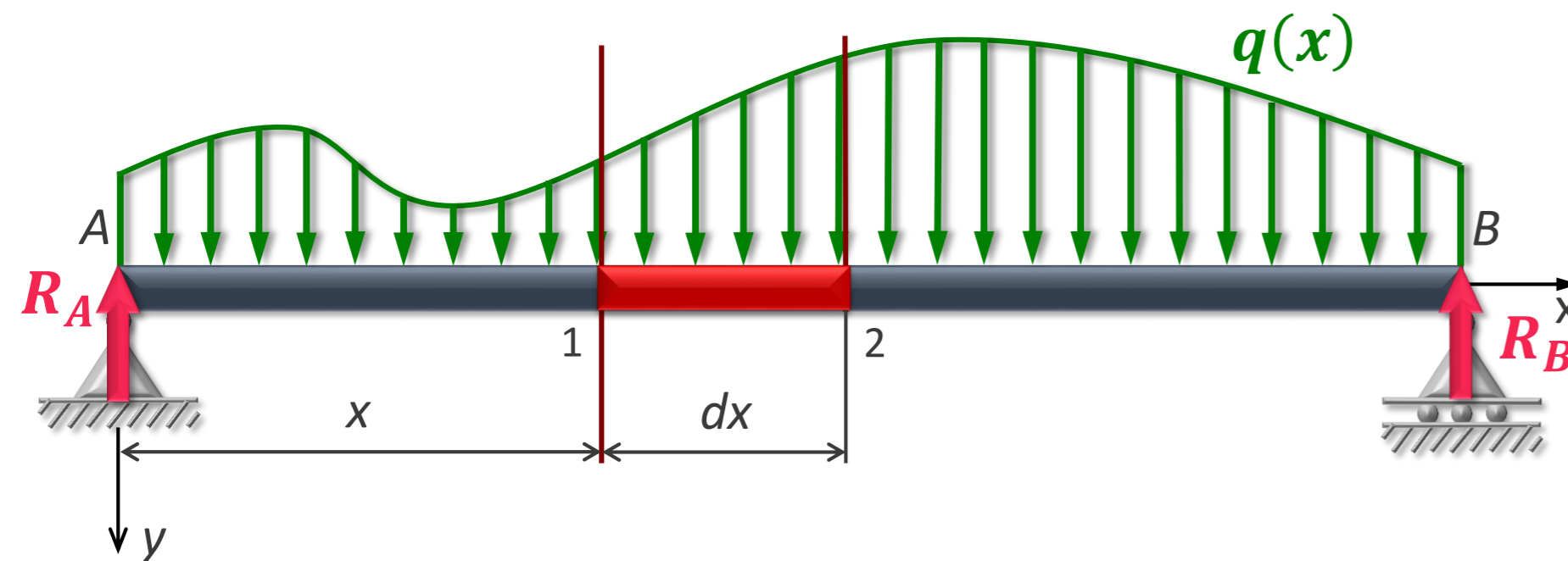


$$q(x) = -\frac{dT}{dx}$$

MOMENT GNĄCY

Zależności między obciążeniem ciągłym a momentem gnącym

Warunek równowagi momentów dla belki o elementarnej długości dx



$$\sum M_0 = 0$$

$$-M_g - q(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (T + dT)dx + (M_g + dM_g) = 0$$

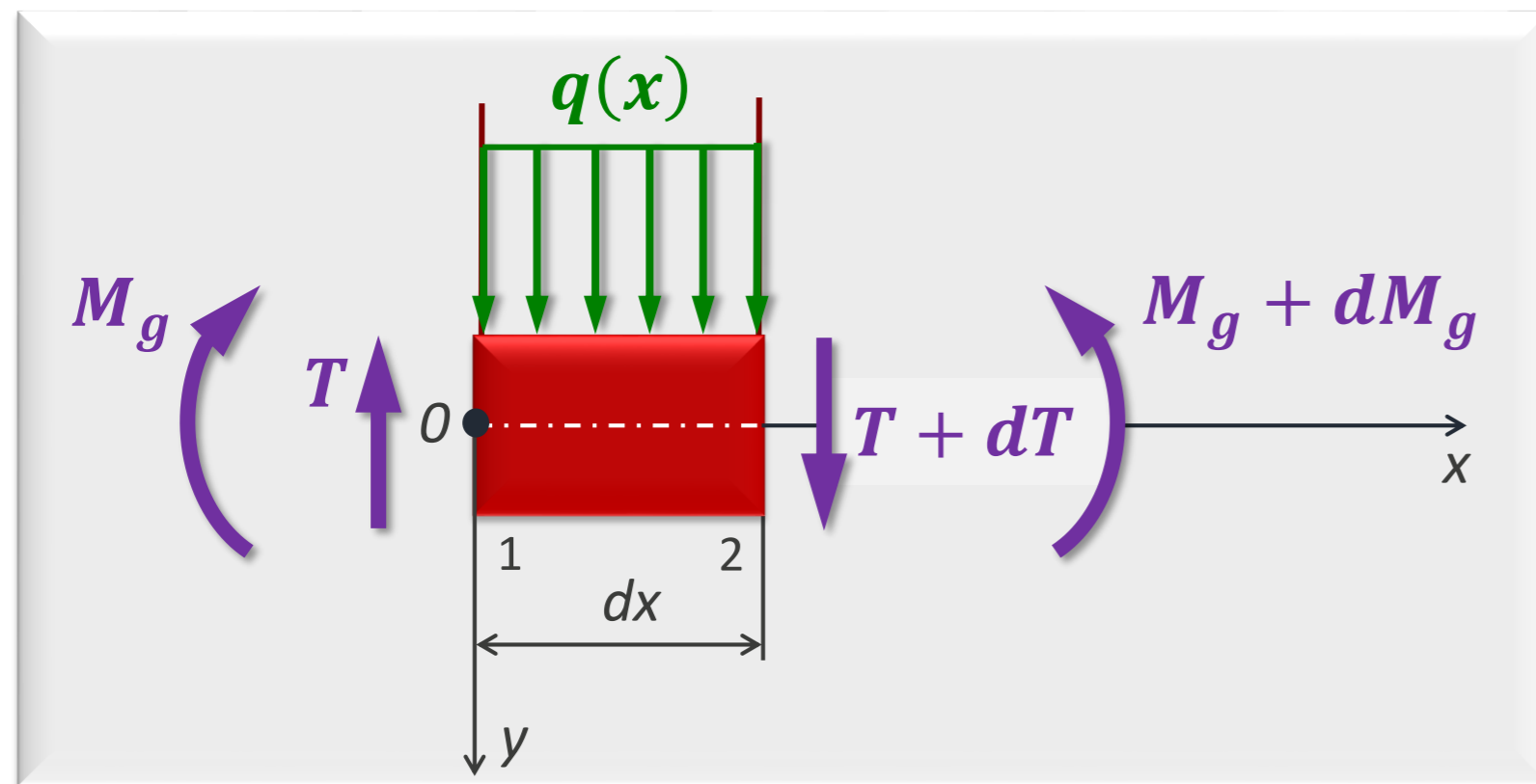
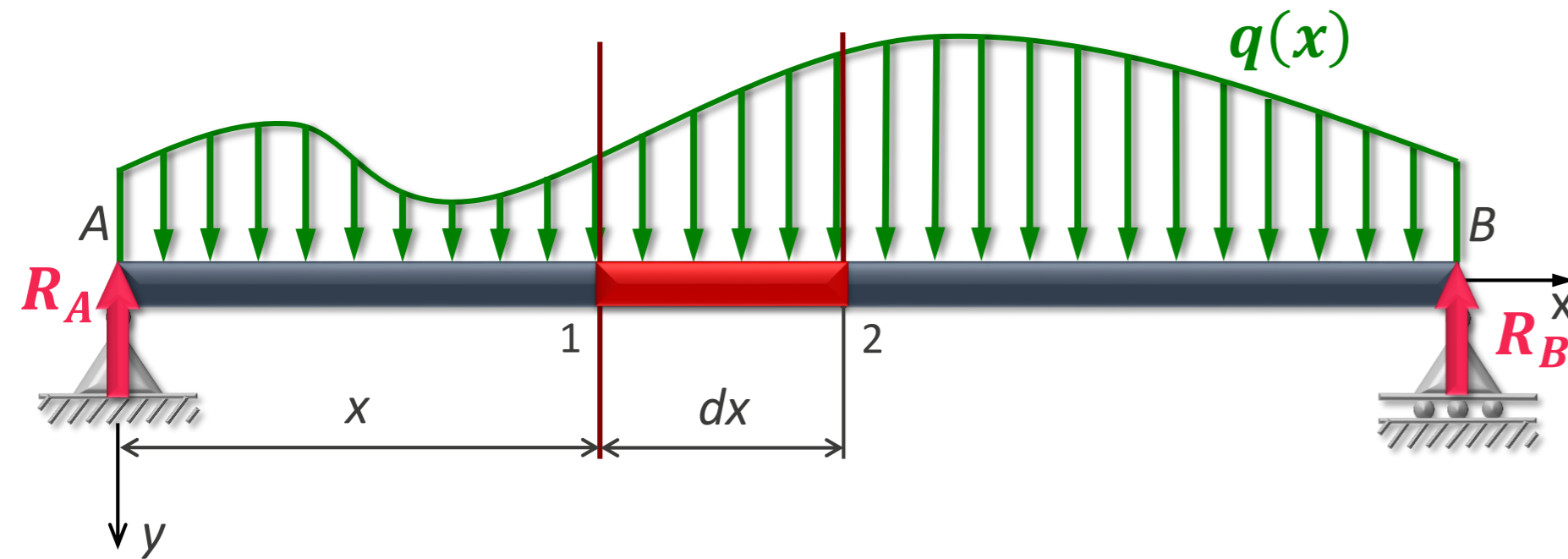
$$-\cancel{M_g} - q(x) \cdot \frac{dx^2}{2} - Tdx - dTdx + \cancel{M_g} + dM_g = 0$$

$$Tdx + dM_g = 0$$

$$T(x) = -\frac{dM_g}{dx}$$

MOMENT GNĄCY

Zależności między obciążeniem ciągłym, siłą tnącą a momentem gnącym

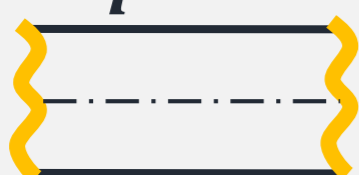
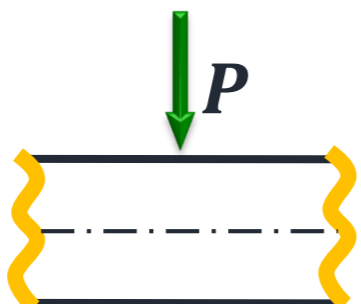
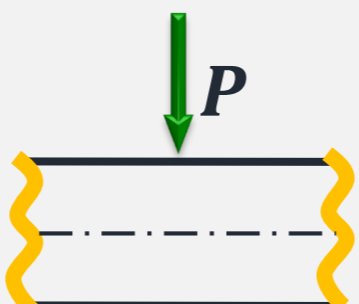
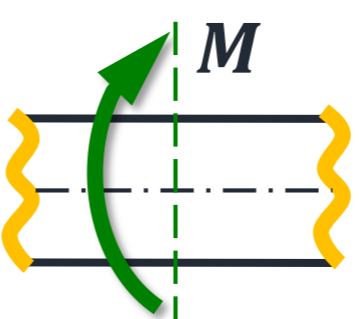
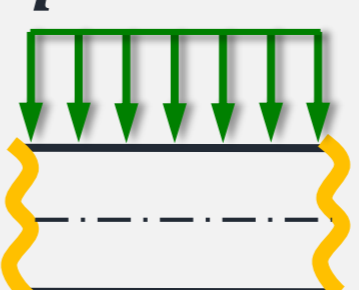
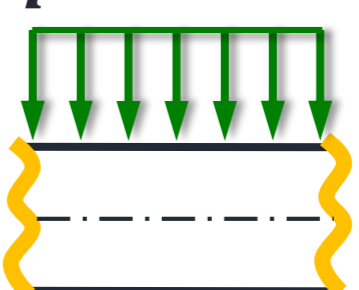
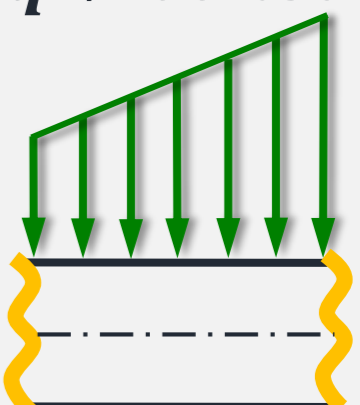

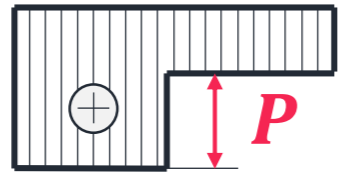
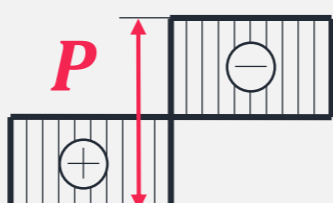
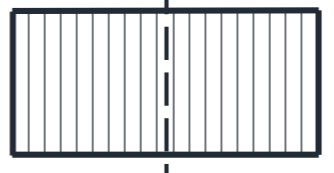
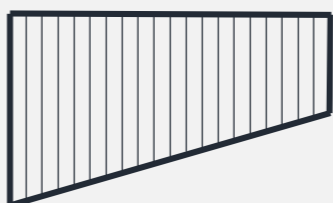
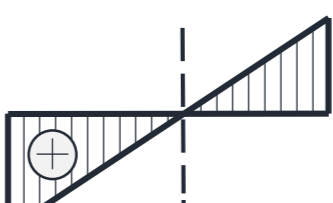

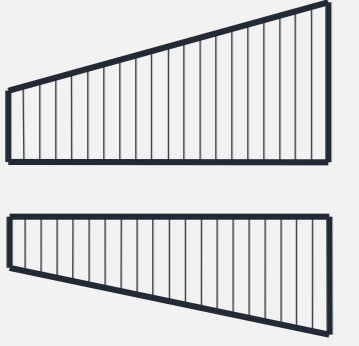
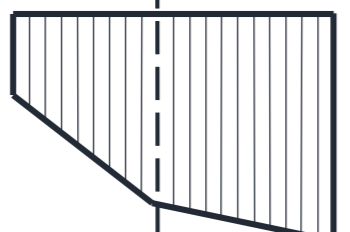
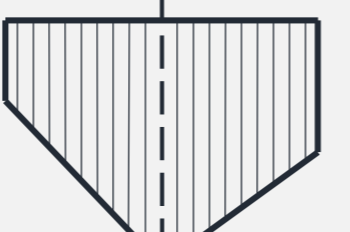
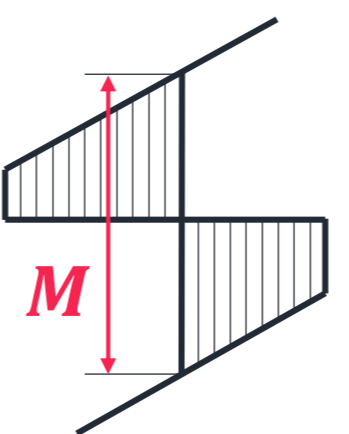
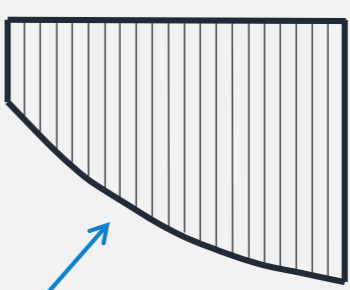
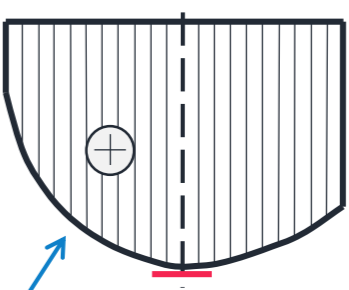
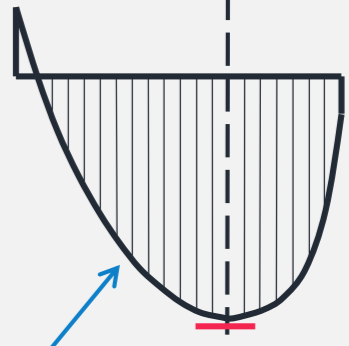


$$q(x) = -\frac{dT}{dx}$$

$$T(x) = -\frac{dM_g}{dx}$$

$$q(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

Podstawowe zależności między obciążeniem P , q , M a wykresami T , M_g

Obciążenie	$P = 0$ $q = 0$ 				$q = const$ 	$q = const$ 	$q \neq const$ 
Wykres siły tnącej T							 <p>Parabola 2-go stopnia</p>
Wykres momentu gnącego M_g			 <p>Ekstremum</p>		 <p>Parabola 2-go stopnia</p>	 <p>Ekstremum</p> <p>Parabola 2-go stopnia</p>	 <p>Ekstremum</p> <p>Parabola 3-go stopnia</p>

ZGINANIE

Etapy rozwiązywania zadań w statyce

Wykonać rysunek układu do rozwiązania

Nanieść układ współrzędnych

Uwolnić badany układ od więzów (zastąpić więzy reakcjami)

Wyznaczyć siły tnące i momenty gnące w przekrojach belki

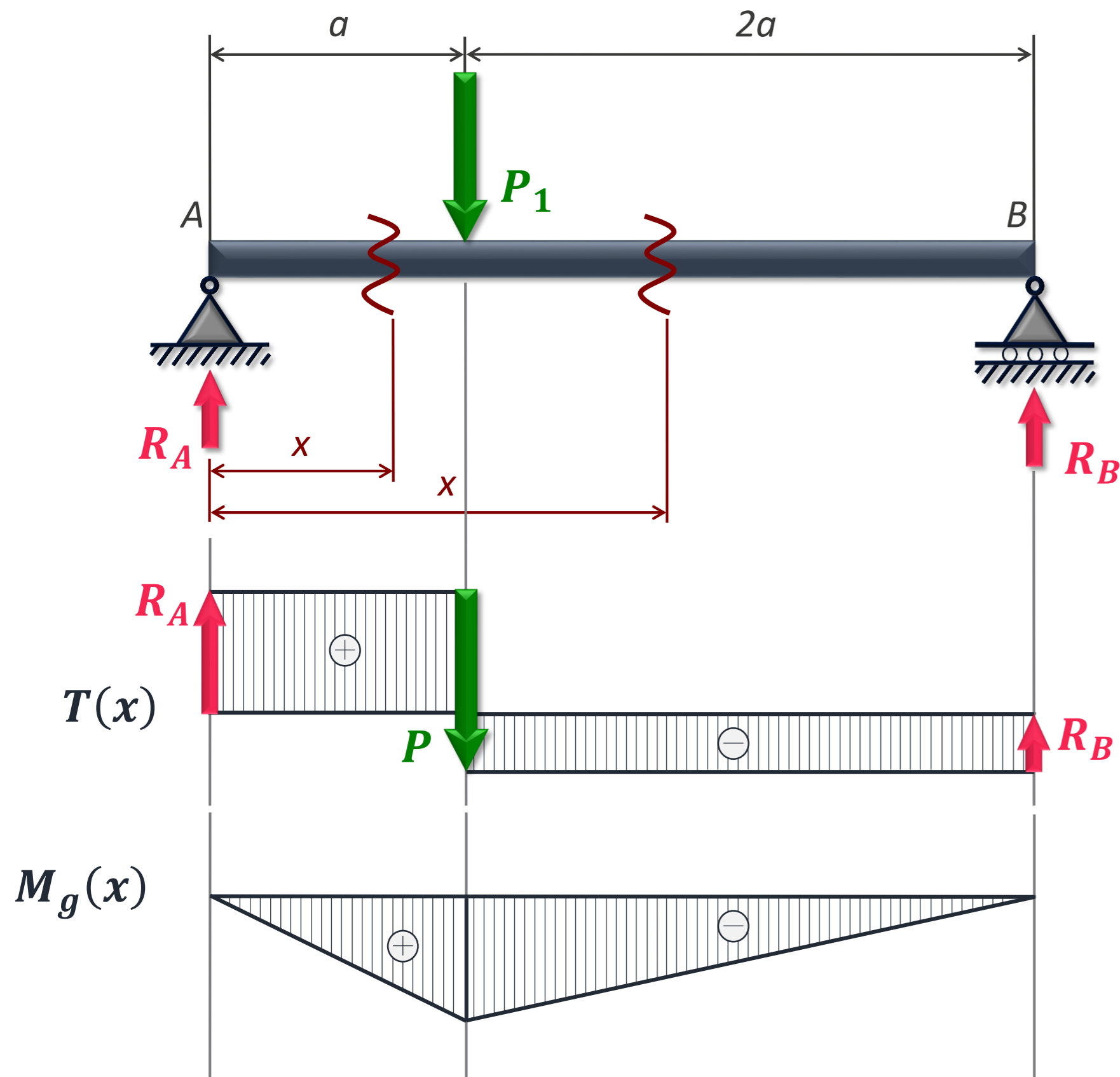
Wyznaczyć naprężenia w przekrojach belki

Wyznaczyć odkształcenia w przekrojach belki:

Ugięcie

Kąt obrotu

Wyznaczanie sił i momentów wewnętrznych w belkach zginanych



Dane: $P_1 = qa, a, b$

Wyznaczyć: wykresy T, M_g

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_1 \cdot a + R_B \cdot 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{P_1 \cdot a}{3a} = \frac{1}{3}qa$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_1 \cdot 2a + R_A \cdot 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{P_1 \cdot 2a}{3a} = \frac{2}{3}qa$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_g(x) = R_A \cdot x = \frac{2}{3}qa \cdot x$$

$$M_g(x=0) = R_A \cdot 0 = 0$$

$$M_g(x=a) = R_A \cdot a = \frac{2}{3}qa \cdot a = \frac{2}{3}qa^2$$

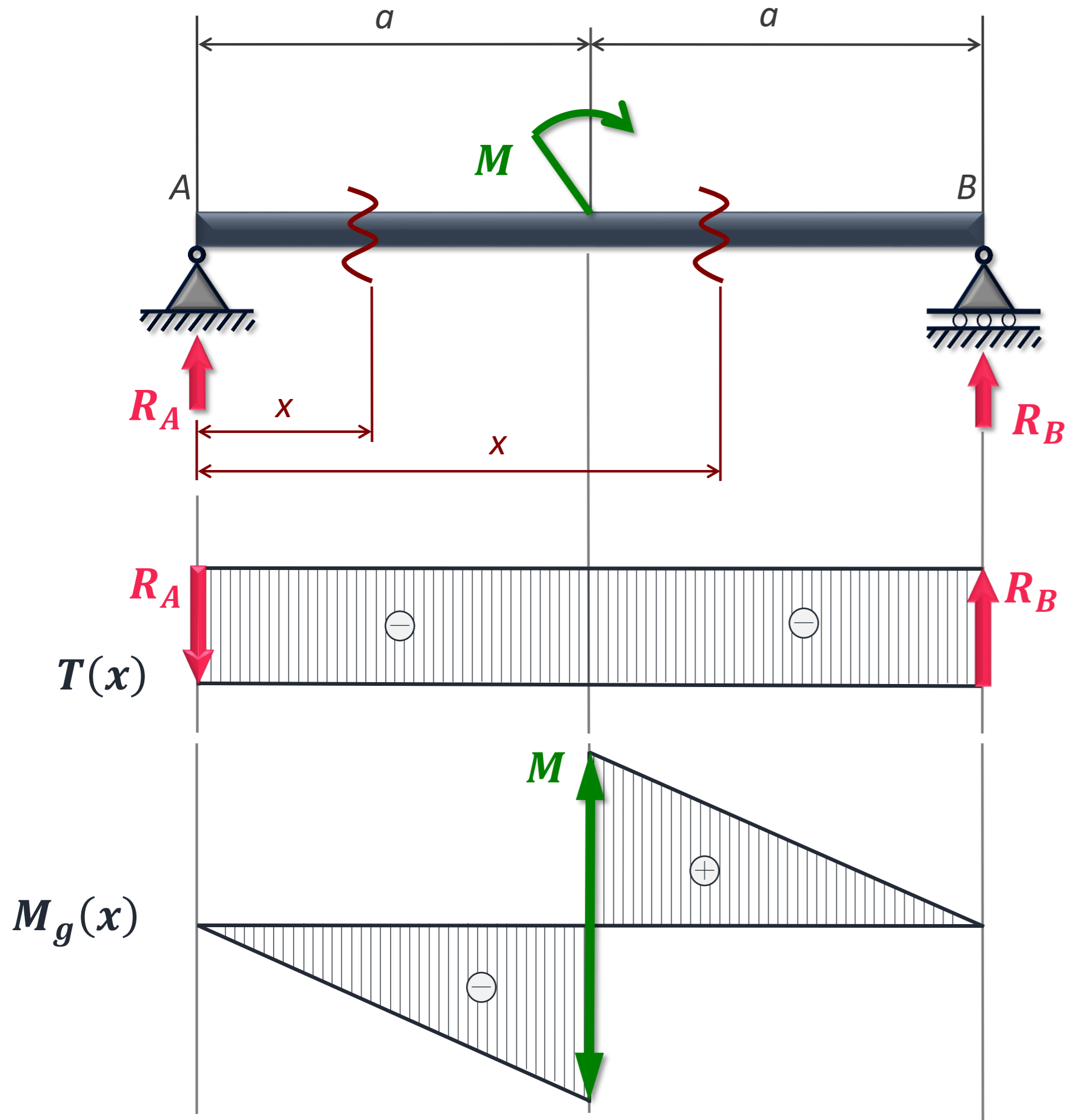
$$a \leq x \leq 3a$$

$$M_g(x) = R_A \cdot x - P_1 \cdot (x - a) = \frac{2}{3}qa \cdot x - qa \cdot (x - a)$$

$$M_g(x=a) = \frac{2}{3}qa^2$$

$$M_g(x=3a) = \frac{6}{3}qa^2 - 2qa^2 = 0$$

Wyznaczanie sił i momentów wewnętrznych w belkach zginanych



Dane: $M = qa^2, a, b$

Wyznaczyć: wykresy T, M_g

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -M + R_B \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{M}{2a} = \frac{qa^2}{2a} = \frac{1}{2}qa$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = -\frac{1}{2}qa$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_g(x) = R_A \cdot x$$

$$M_g(x=0) = R_A \cdot 0 = 0 \quad M_g(x=a) = R_A \cdot a = -\frac{1}{2}qa \cdot a = -\frac{1}{2}qa^2$$

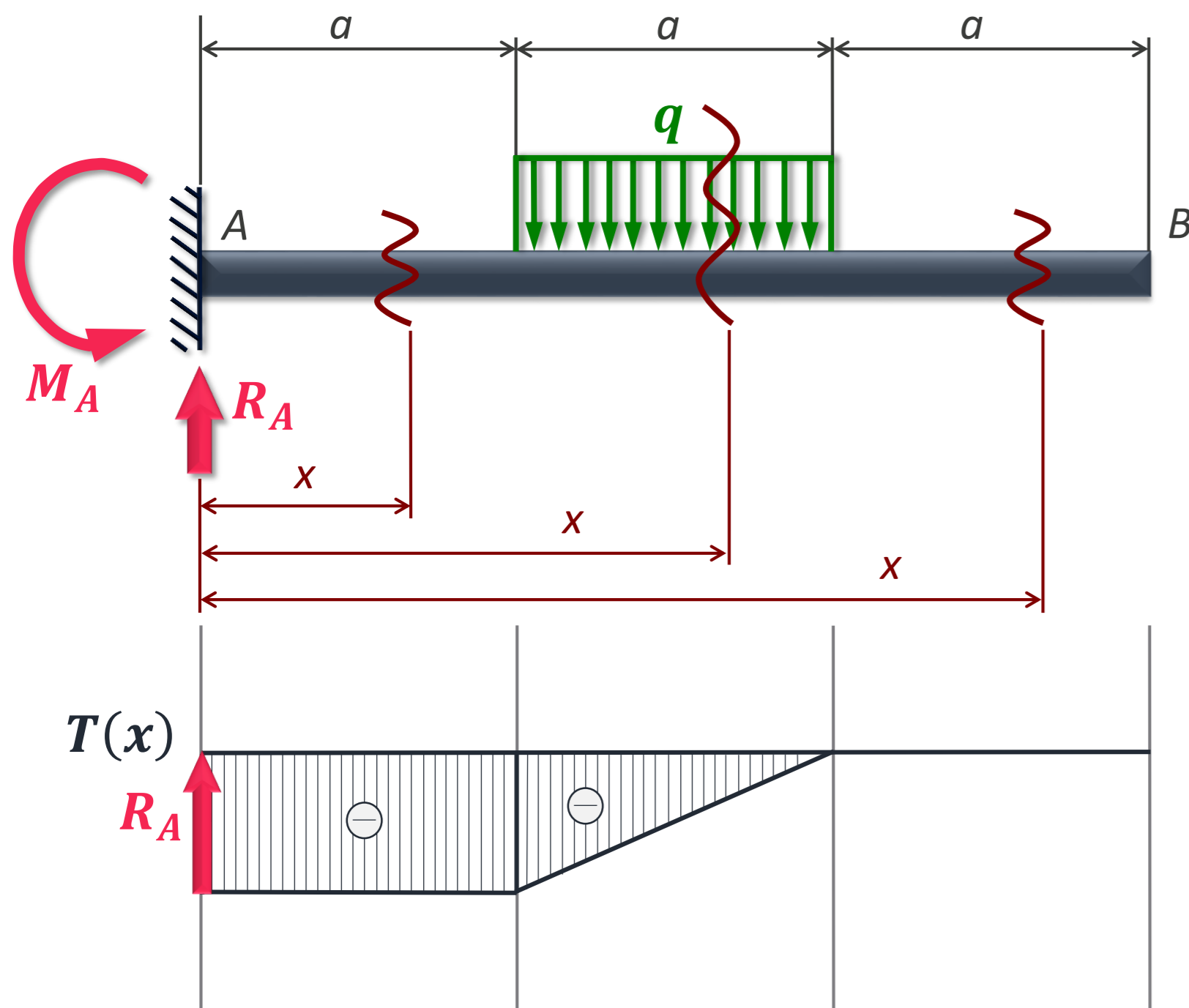
$$a \leq x \leq 2a$$

$$M_g(x) = R_A \cdot x + M$$

$$M_g(x=a) = R_A \cdot a + M = -\frac{1}{2}qa^2 + qa^2 = \frac{1}{2}qa^2$$

$$M_g(x=2a) = R_A \cdot 2a + M = -qa^2 + qa^2 = 0$$

Wyznaczanie sił i momentów wewnętrznych w belkach zginanych



Dane: q, a, b

Wyznaczyć: wykresy T, M_g

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - q \cdot a \cdot \frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow M_A = \frac{3}{2}qa^2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A + qa = 0 \Rightarrow R_A = qa$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_g(x) = -M_A + R_A \cdot x = -\frac{3}{2}qa^2 + qa \cdot x$$

$$M_g(x=0) = -\frac{3}{2}qa^2 \quad M_g(x=a) = -\frac{3}{2}qa^2 + qa \cdot a = -\frac{1}{2}qa^2$$

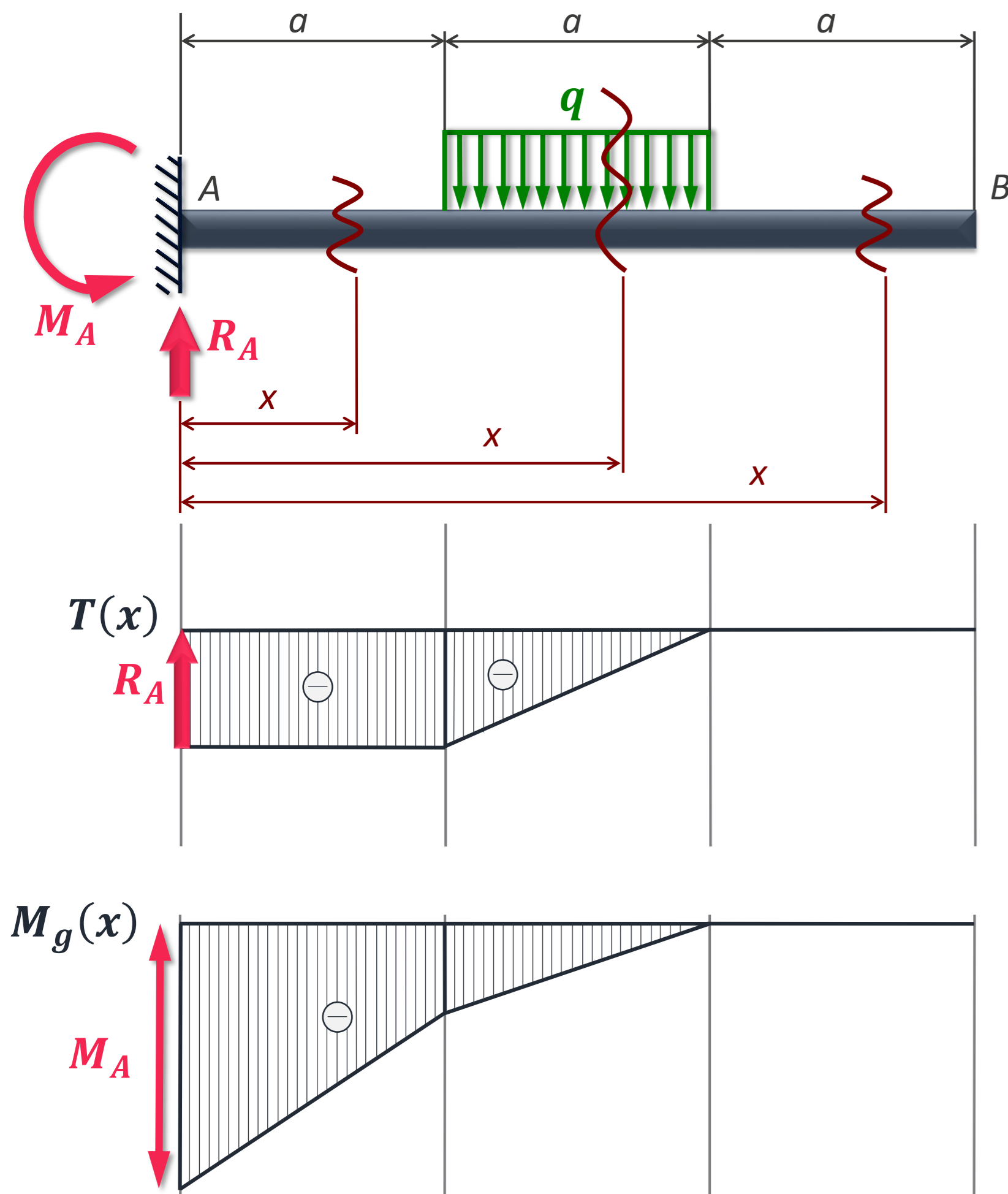
$$a \leq x \leq 2a$$

$$M_g(x) = -M_A + R_A \cdot x - q(x-a) \frac{(x-a)}{2} = -\frac{3}{2}qa^2 + qa \cdot x - q \frac{(x-a)^2}{2}$$

$$M_g(x=a) = -\frac{1}{2}qa^2$$

$$M_g(x=2a) = -\frac{3}{2}qa^2 + qa \cdot 2a - q \frac{(2a-a)^2}{2} = 0$$

Wyznaczanie sił i momentów wewnętrznych w belkach zginanych



Dane: q, a, b

Wyznaczyć: wykresy T, M_g

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - q \cdot a \cdot \frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow M_A = \frac{3}{2}qa^2$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_A - R_A \cdot 3a = 0 \Rightarrow R_A = qa$$

$$0 \leq x \leq a \quad M_g(x=0) = -\frac{3}{2}qa^2 \quad M_g(x=a) = -\frac{1}{2}qa^2$$

$$a \leq x \leq 2a \quad M_g(x=a) = -\frac{1}{2}qa^2 \quad M_g(x=2a) = 0$$

$$2a \leq x \leq 3a$$

$$M_g(x) = -M_A + R_A \cdot x - qa \left(x - \frac{3}{2}a \right) = -\frac{3}{2}qa^2 + qa \cdot x - qa \left(x - \frac{3}{2}a \right)$$

$$M_g(x=2a) = -\frac{3}{2}qa^2 + qa \cdot 2a - qa \left(2a - \frac{3}{2}a \right) = 0$$

$$M_g(x=3a) = -\frac{3}{2}qa^2 + qa \cdot 3a - qa \left(3a - \frac{3}{2}a \right) = 0$$