



# **Mechanika i wytrzymałość materiałów**

© Materiały do wykładów dla studentów kierunków niemechanicznych





**dr inż. Magdalena Grygorowicz**

magdalena.grygorowicz@put.poznan.pl



Wydział Budowy Maszyn i Zarządzania

Instytut Mechaniki Stosowanej

Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



**KONSULTACJE:**

poniedziałek, czwartek 11.30 – 13.00,

budynek CMBiN, pok. 406



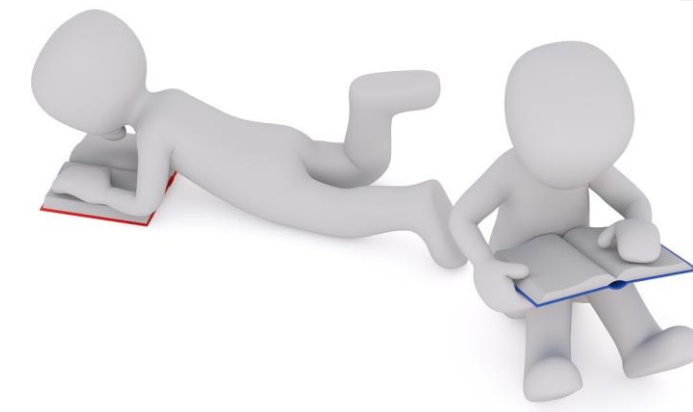
# LITERATURA



## PODRĘCZNIKI

1. Ostwald M., „Podstawy wytrzymałości materiałów”, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2011 r.,
2. Kozak B., Mechanika techniczna. WSiP, Warszawa 2004.
3. Niezgodziński T. „Mechanika ogólna”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999
4. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., „Wytrzymałość materiałów” Tom I. WNT, Warszawa 1996; Tom II WNT, Warszawa 1997 r.,
5. Zielnica J., „Wytrzymałość materiałów”, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1996 r.,
6. Engel Z., Giergiel J., „Statyka”, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2000,
7. Engel Z., Giergiel J., „Kinematyka”, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 1988,
8. Engel Z., Giergiel J., „Dynamika”, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2001.

# LITERATURA



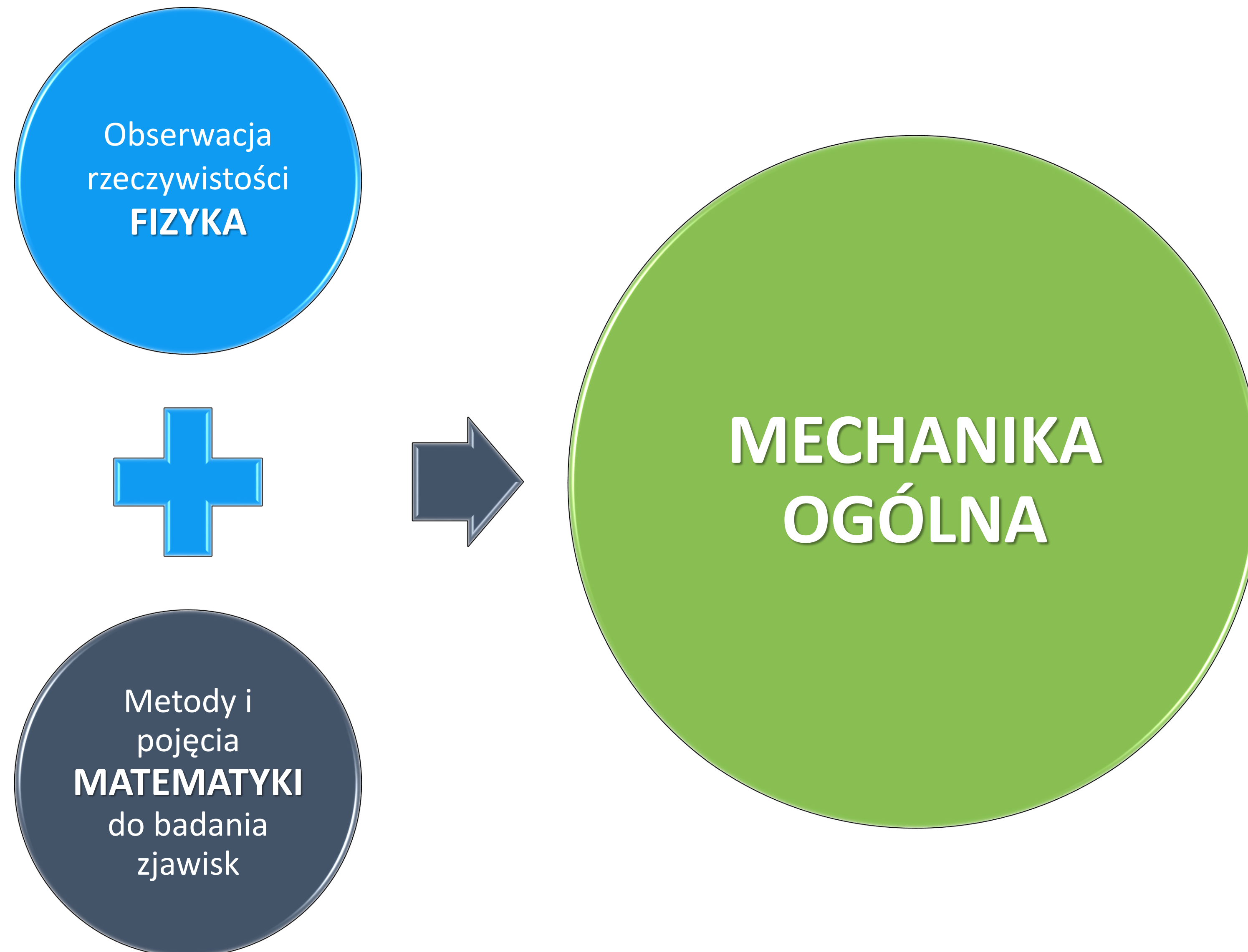
## ZBIORY ZADAŃ

1. Ostwald M., „Wytrzymałość materiałów. Zbiór zadań”, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008 r.,
2. Magnucki K., Szyc W., „Wytrzymałość materiałów w zadaniach. Pręty, płyty i powłoki obrotowe”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa – Poznań 2000 r.,
3. Magnucki K., Szyc W., „Wytrzymałość materiałów w zadaniach”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa – Poznań 1987 r.,
4. Kurowski R., Parszewski Z., „Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów”, PWN Warszawa 1972 r.

## SKRYPT

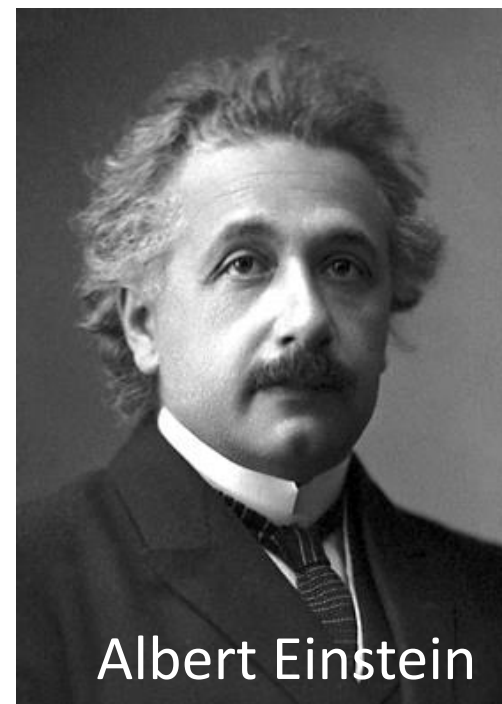
Joniak S. (red.), „Badania eksperymentalne w wytrzymałości materiałów”, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań (2000-2006).

# STRUKTURA PRZEDMIOTU



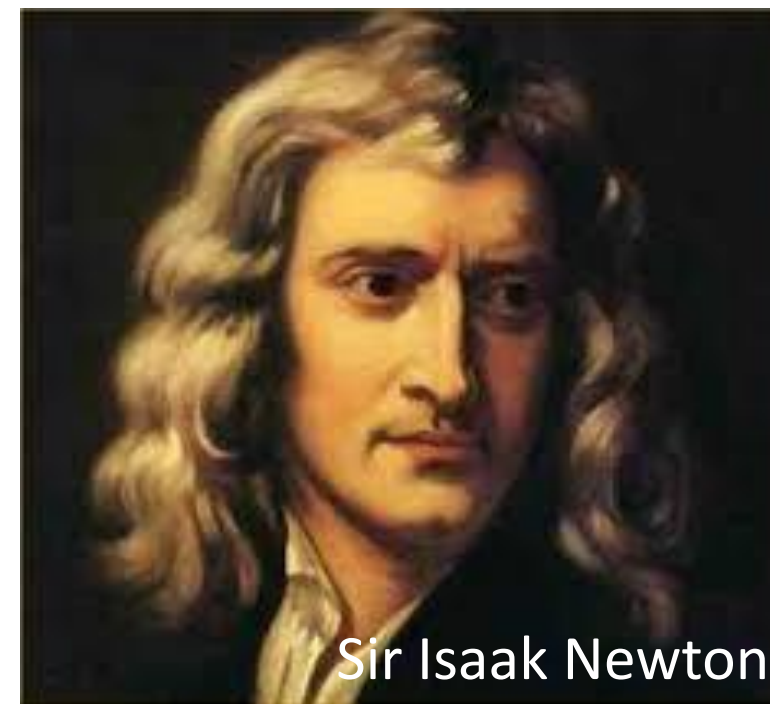
# MECHANIKA

**RELATYWISTYCZNA**  
Skala makro



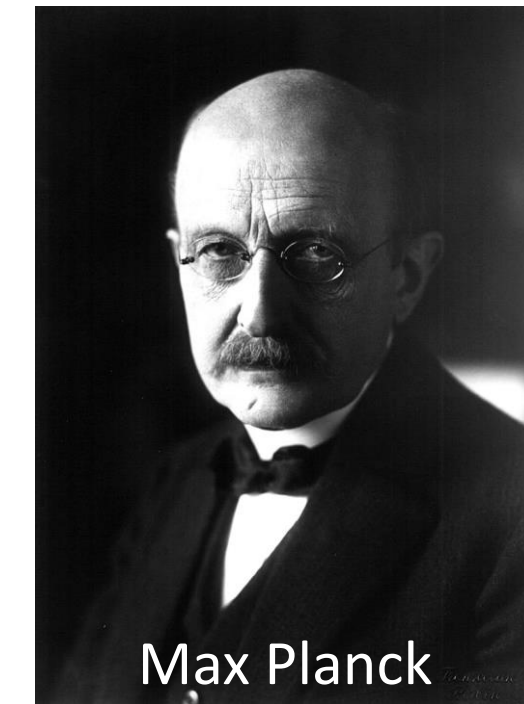
$$E = m \cdot c^2$$

**TECHNICZNA**  
newtonowska



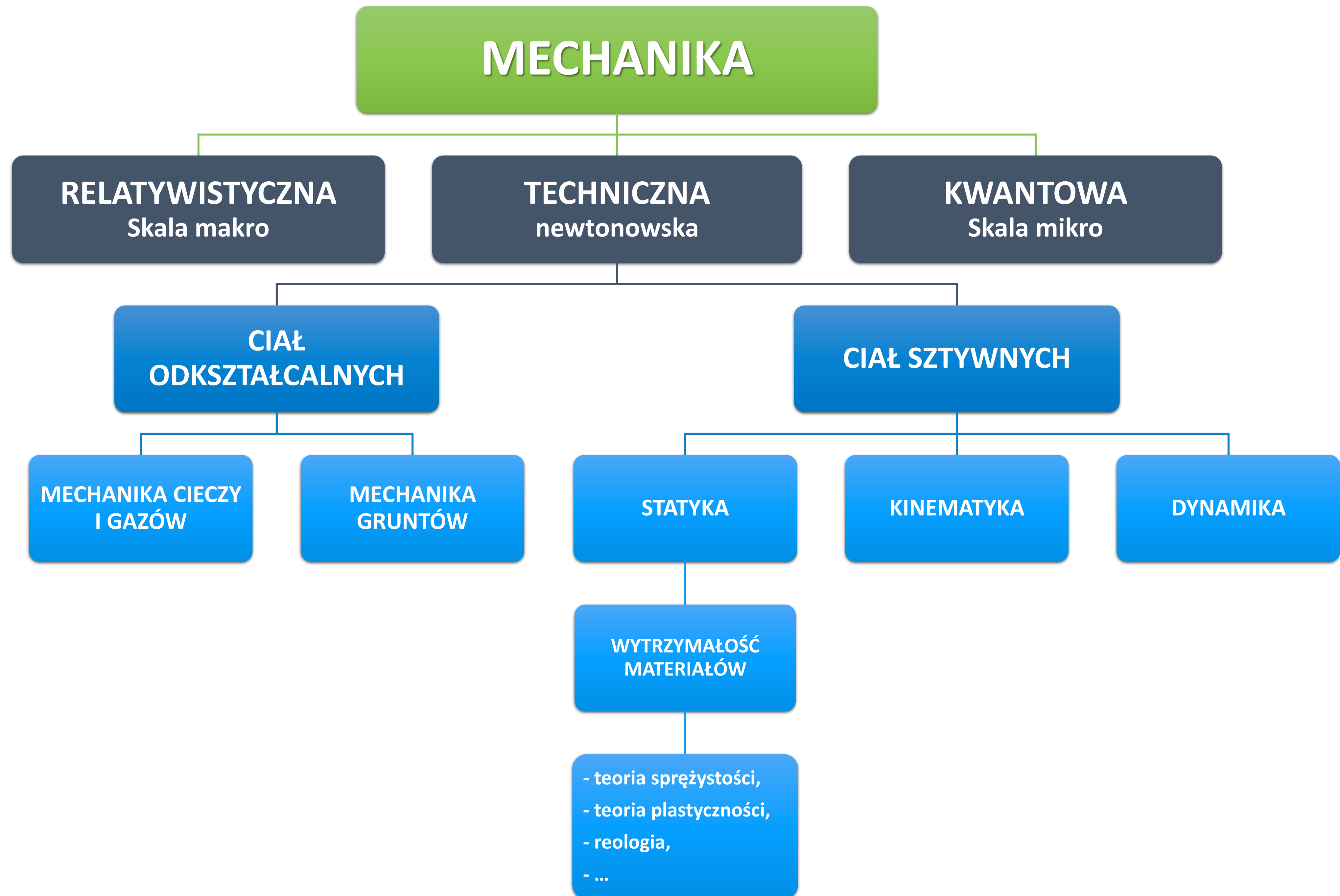
Sir Isaak Newton

**KWANTOWA**  
Skala mikro



Max Planck

$$E = h \cdot \nu$$





# Co to jest mechanika newtonowska?

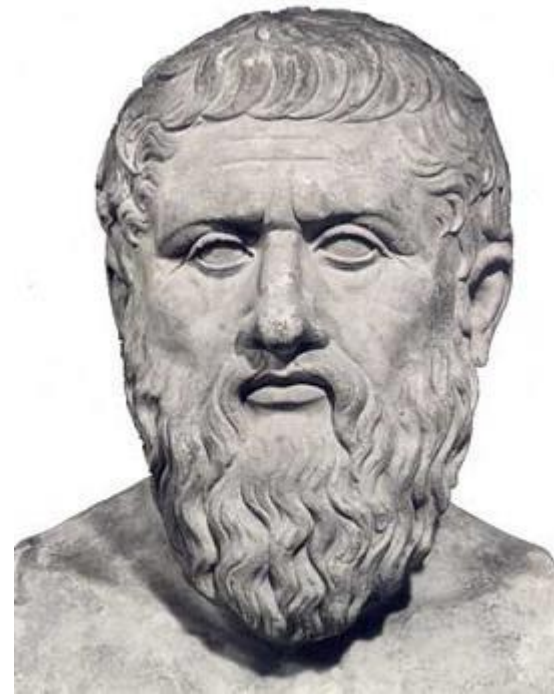


## MECHANIKA TECHNICZNA

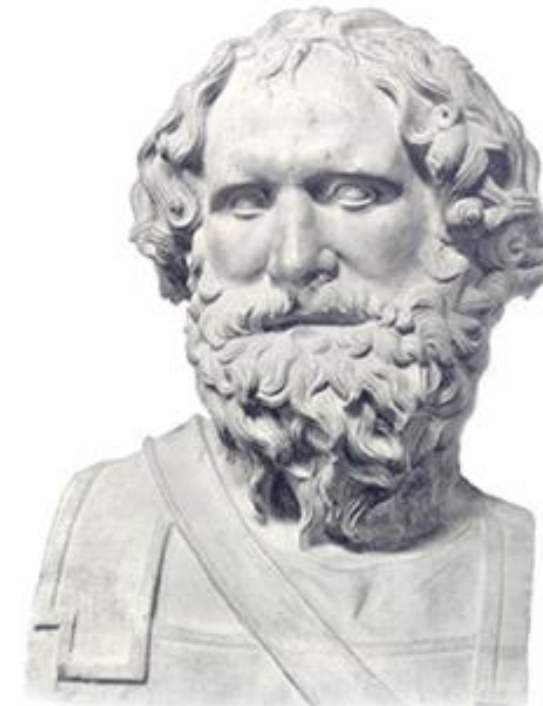
nauka zajmująca się badaniem równowagi *ciał materialnych* (**STATYKA**), opisem ruchu mechanicznego tych ciał bez uwzględnienia ich cech fizycznych oraz działających na nie sił (**KINEMATYKA**) oraz opisem wpływu różnych oddziaływań, np. sił, na ruch tych ciał (**DYNAMIKA**).



# OJCOWIE WSZPÓŁCZESNEJ MECHANIKI



Arystoteles  
384-322 p.n.e.



Archimedes  
287-212 p.n.e.



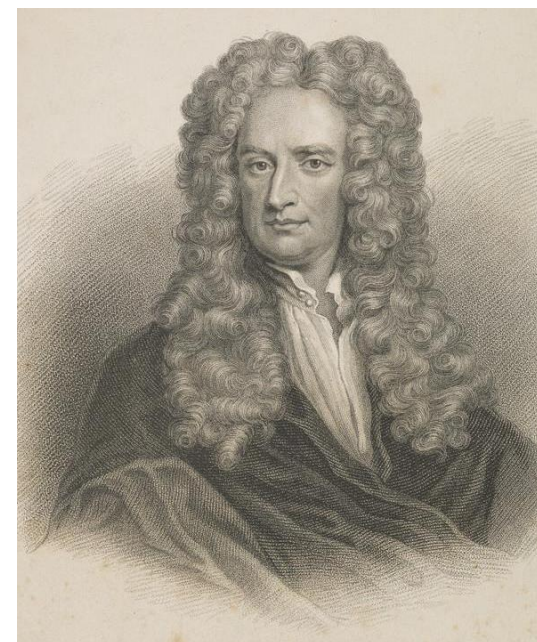
Ptolemeusz  
100-168 n.e.



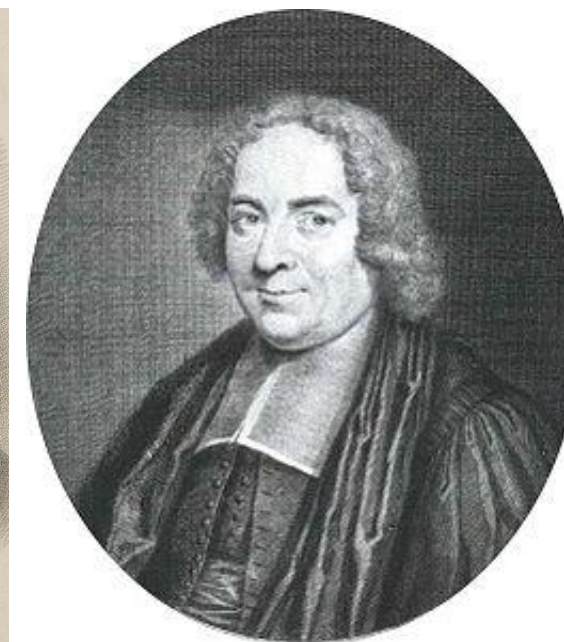
Galileusz  
1564-1642



Kartezjusz  
1596-1650



Isaac Newton  
1642-1727



Pierre Varigon  
1654-1722



Jan Bernoulli  
1667-1748



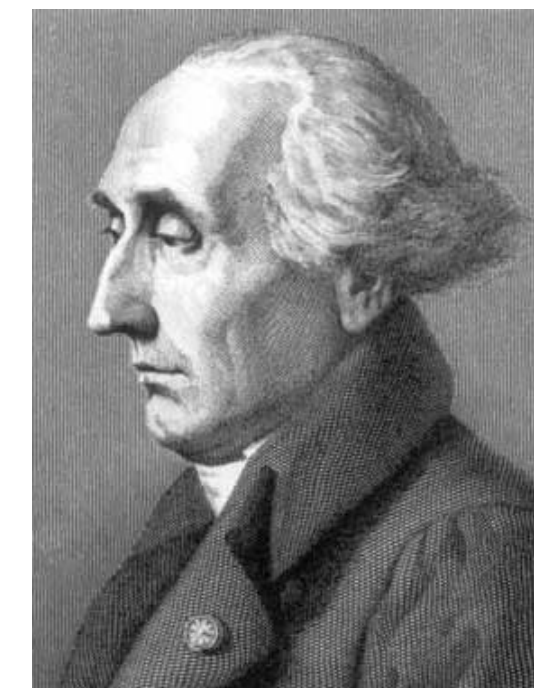
Michał  
Łomonosow  
1711-1765



Leonard Euler  
1701-1783



Jean D'Alambert  
1717-1783



Ludwig Lagrange  
1737-1813





# Podstawowe pojęcia w mechanice

## Pojęcia pierwotne

Wielkość fizyczna	Nazwa jednostki	Symbol
Czas	sekunda	s
Długość	metr	m
Masa	gram	g
Siła	niuton	N
Natężenie prądu	amper	A
Temperatura	kelwin	K
Ilość materii	mol	mol
Światłość	kandela	cd
Kąt płaski	radian	rad
Kąt bryłowy	steradian	sr

## Jednostki pochodne w mechanice

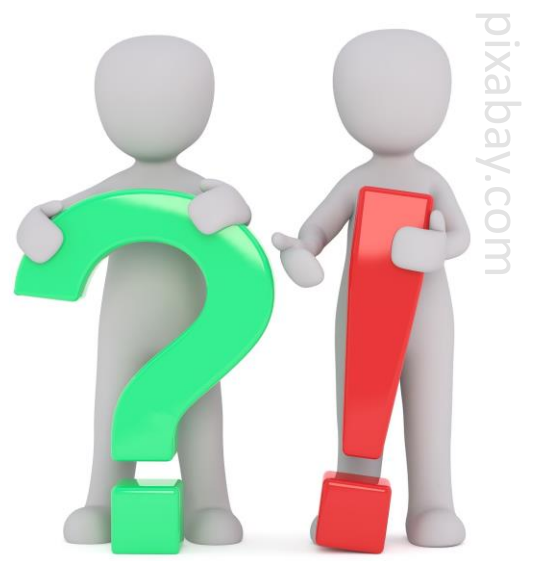
$$prędkość = \frac{długość (droga)}{czas} \quad \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$praca = siła \times długość (droga) \quad [N \cdot m]$$

$$moc = \frac{praca}{czas} \quad \left[ \frac{N \cdot m}{s} = W \right]$$



# Podstawowe pojęcia w mechanice



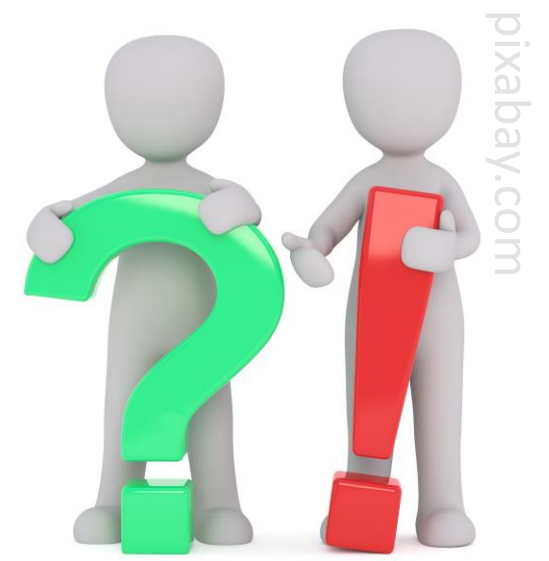
## Klasyfikacja obciążeń

**siła** wynik wzajemnego mechanicznego oddziaływania ciał na siebie (oddziaływanie bezpośrednie)

**Rodzaje sił** ze względu na pochodzenie

- a) **Siły zewnętrzne** – przyłożone do danego ciała, wywierane przez inne ciało,
  - Czynne – mogące wywoływać ruch, niezależne od warunków, w jakich znajduje się ciało,
  - Bierne – stanowią wynik oddziaływania więzów,
- b) **Siły wewnętrzne** – siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy punktami materialnymi rozpatrywanego układu.

# Podstawowe pojęcia w mechanice



## Klasyfikacja obciążeń

**Rodzaje obciążeń** ze względu na sposób przyłożenia

a) **objętościowe** – działające na każdą cząstkę danego ciała, np. siła ciężkości

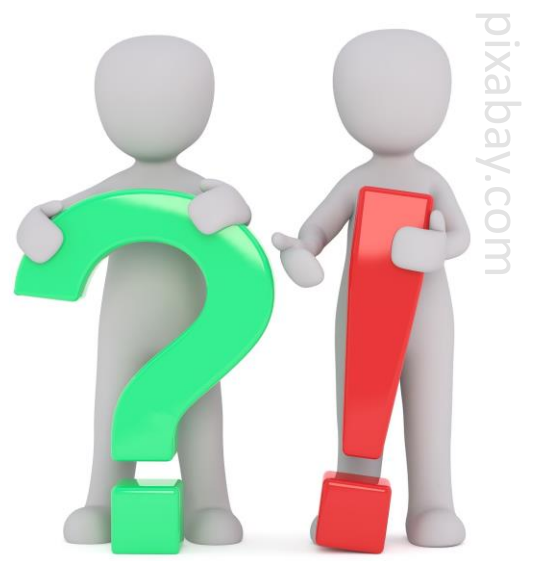


b) **powierzchniowe** – działające na powierzchnię danego ciała,





# Podstawowe pojęcia w mechanice



## Klasyfikacja obciążeń

**Rodzaje obciążeń** ze względu na sposób przyłożenia

c) **Liniowe** – przyłożone w sposób ciągły na pewnej długości, np. ranny na noszach



$$q [N/m]$$



$$q = [N/m]$$

d) **Skupione** – siła lub moment siły przyłożone w wybranym punkcie danego ciała, np. skoczek na trampolinie.



$$G [N]$$



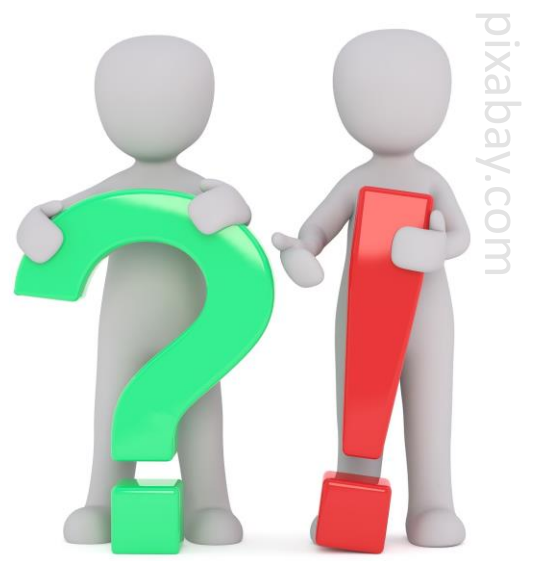
$$G [N]$$



$$M [Nm]$$



# Podstawowe pojęcia w mechanice



## Klasyfikacja obciążeń

**Rodzaje obciążeń** ze względu na zmianę w czasie

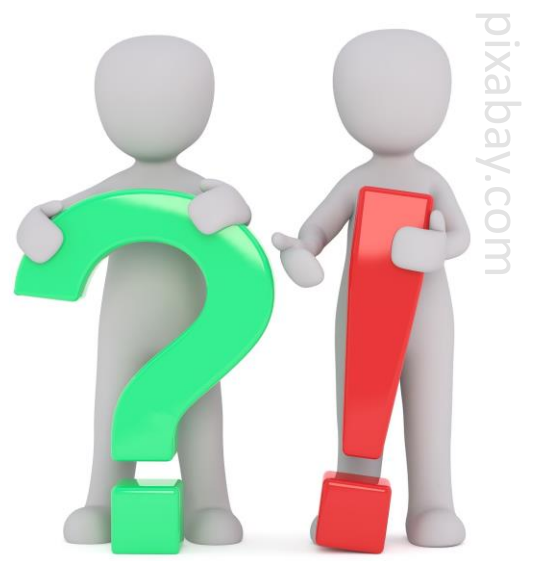
- a) **statyczne** – wolno narastające od zera do wartości granicznej,
- b) **dynamiczne** – przyłożone w sposób nagły, działa impulsowo, np. uderzenie,



- c) **okresowo-zmienne** – zmieniające się w czasie



# Modelowanie ciała rzeczywistego



**CIAŁO MATERIALNE** jest myślowym uproszczeniem ciała rzeczywistego. Modele ciała materialnego:

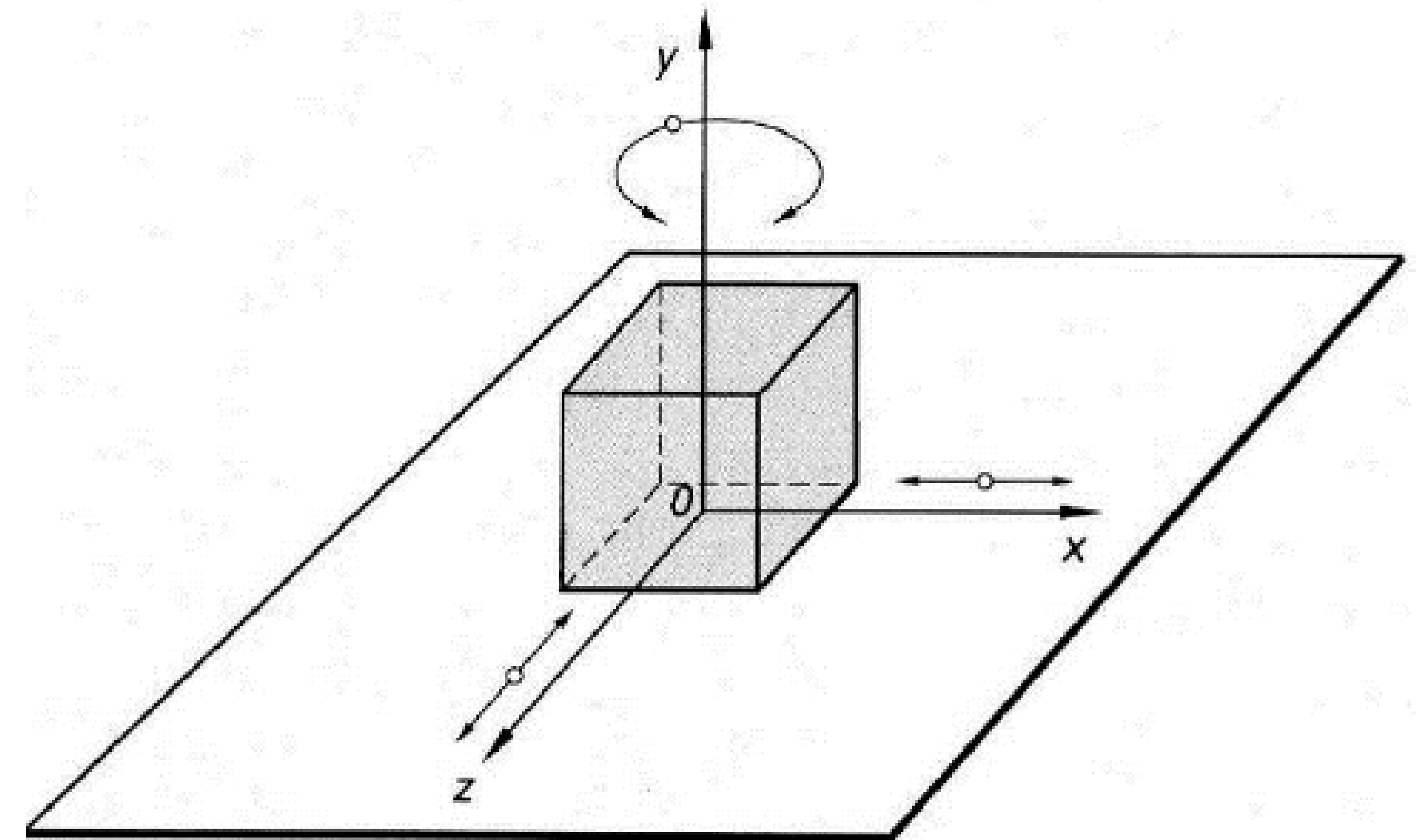
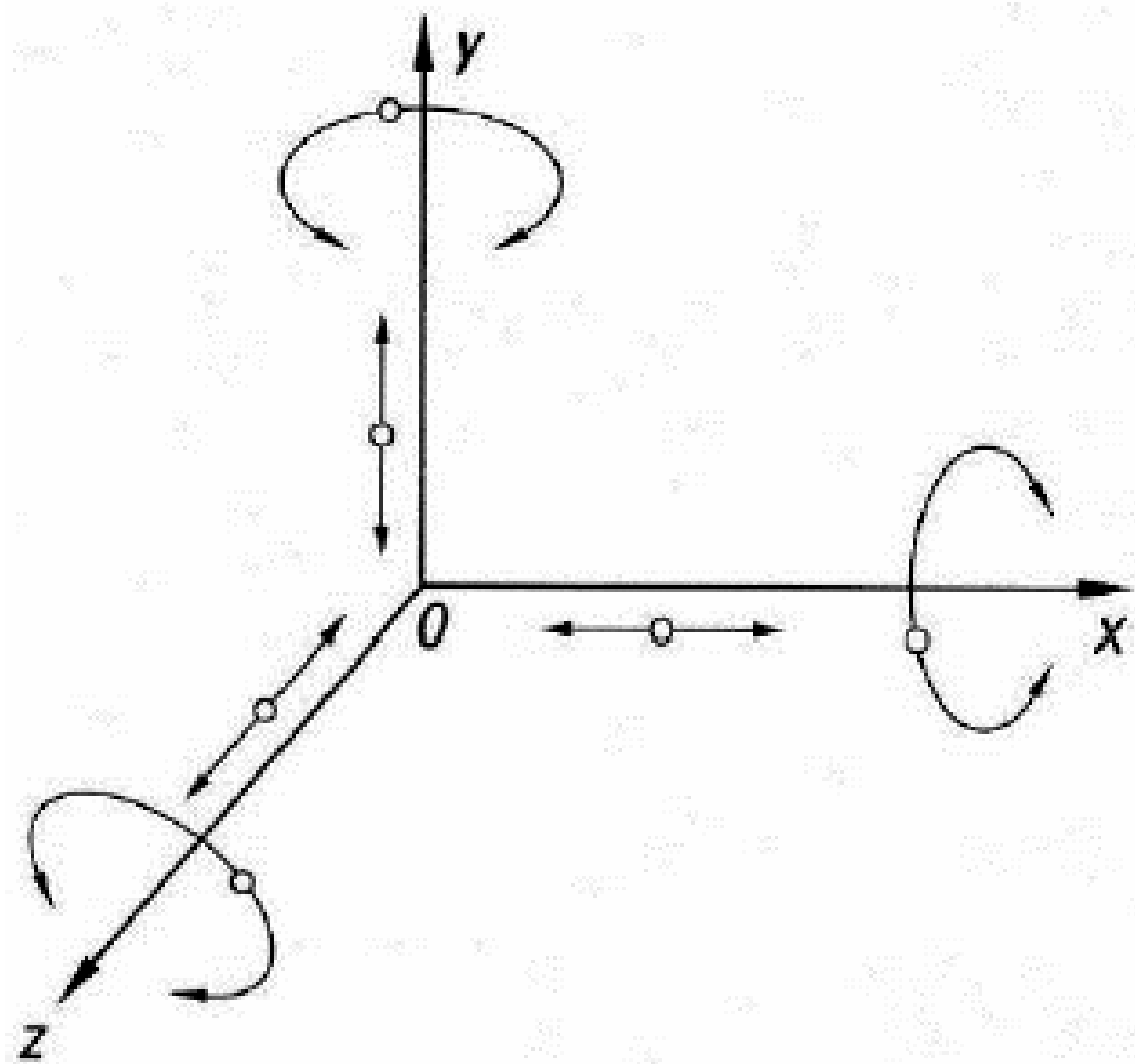
- a) **punkt materialny** – punkt geometryczny, któremu przypisano pewną masę,
- b) **układ punktów materialnych** (ciało sztywne, bryła) – układ punktów materialnych o niezmiennych odległościach między tymi punktami,
- c) **ciało swobodne** – ciało mogące przemieszczać się dowolnie w przestrzeni,
- d) **ciało nieswobodne** – ciało, którego ruch w przestrzeni jest ograniczony przez więzy.

# Modelowanie ciała rzeczywistego



## Ciało swobodne

## Ciało nieswobodne



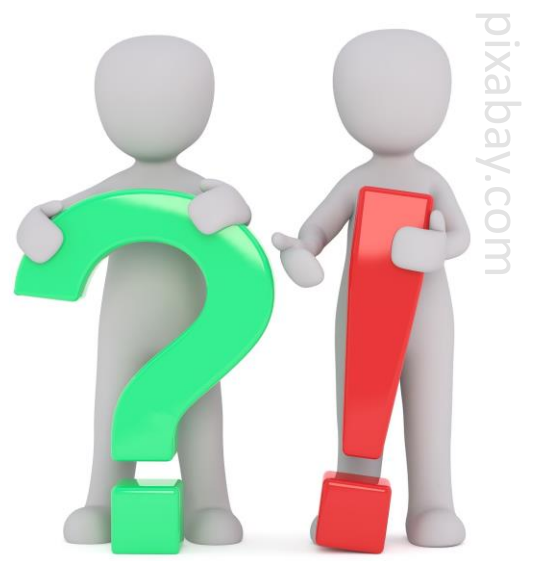
### Stopnie swobody

### Więzy ograniczające ruch

Marian Ostwald, *Podstawy mechaniki*, mechanika techniczna dla studentów kierunków niemechanicznych, 2014



# Modelowanie ciała rzeczywistego



**STOPNIE SWOBODY** minimalna liczba niezależnych współrzędnych niezbędna do jednoznacznego opisu położenia ciała w przestrzeni.

**WIĘZY (wiązanie)** każdy rodzaj ograniczenia nakładanego na ruch ciała (układu ciał).





# Modelowanie ciała rzeczywistego



## RODZAJE WIĘZÓW

Wiązanie	Więzy rzeczywiste	Schemat	Reakcje
<b>a) Podpora przegubowa stała</b> Siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji)			
<b>b) Podpora przegubowa przesuwna</b> Reakcja prostopadła do płaszczyzny, po której następuje ruch			
<b>c) Utwierdzenie</b> Moment w utwierdzeniu oraz siła reakcji o dowolnym kierunku			

# Modelowanie ciała rzeczywistego



## RODZAJE WIĘZÓW

Wiązanie	Więzy rzeczywiste	Schemat	Reakcje
<p><b>d) Przegub kulisty</b></p> <p>Siła reakcji o dowolnym kierunku (trzy składowe reakcji)</p>			
<p><b>e) Podwieszenie na cięgnach, podparcie przegubowe</b></p> <p>Reakcja prostopadła do płaszczyzny, po której następuje ruch</p>			





25.12.1642–20.03.1727

# Newton i jego zasady



## I ZASADA DYNAMIKI

Punkt materialny, na który nie działa żadna siła, pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

zasada bezwładności

## II ZASADA DYNAMIKI

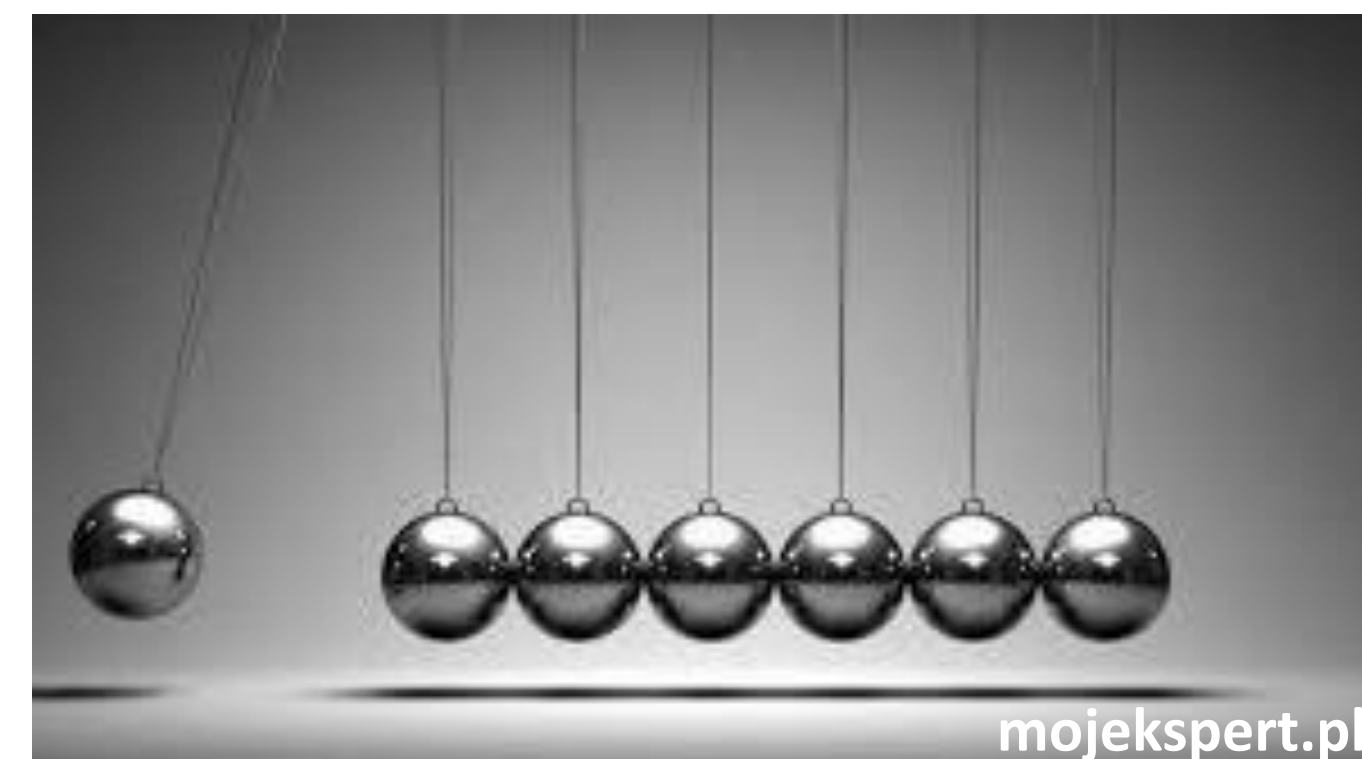
Przyspieszenie punktu materialnego jest proporcjonalne do siły działającej na ten punkt i ma kierunek siły

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

gdzie **m** - masa jest współczynnikiem proporcjonalności.

## III ZASADA DYNAMIKI

Siły wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych są równe co do wartości i są przeciwnie skierowane wzdłuż prostej łączącej oba punkty.





25.12.1642–20.03.1727

## JEDNOSTKI SIŁY I MASY

# Newton i jego zasady



$$1 \text{ niuton} = 1N = 1kg \cdot 1 \frac{m}{s^2} = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

$$1 \text{ kN} = 10^3 N, \quad 1 \text{ MN} = 10^3 \text{ kN} = 10^6 N$$

Siła ciężkości – siła z jaką Ziemia przyciąga dane ciało materialne

**Ciężar ciała = masa · przyspieszenie ziemskie**

$$G = m \cdot g, \quad g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

$$m \cdot g = 1kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 9,81 \frac{kg \cdot m}{s^2} = 9,81 N$$

**Ciężar ciała o masie 1 kg wynosi 9,81 N**

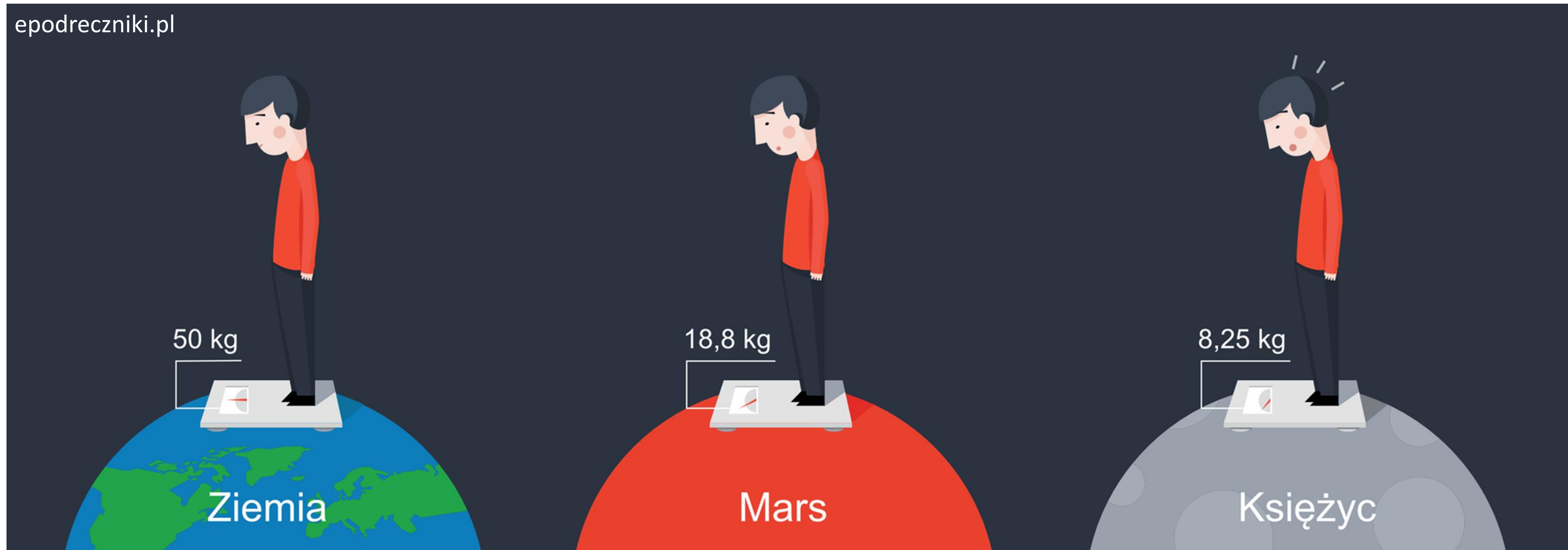




25.12.1642–20.03.1727

# Masa

## Newton i jego zasady





# Rachunek wektorowy

do samodzielnego powtórzenia



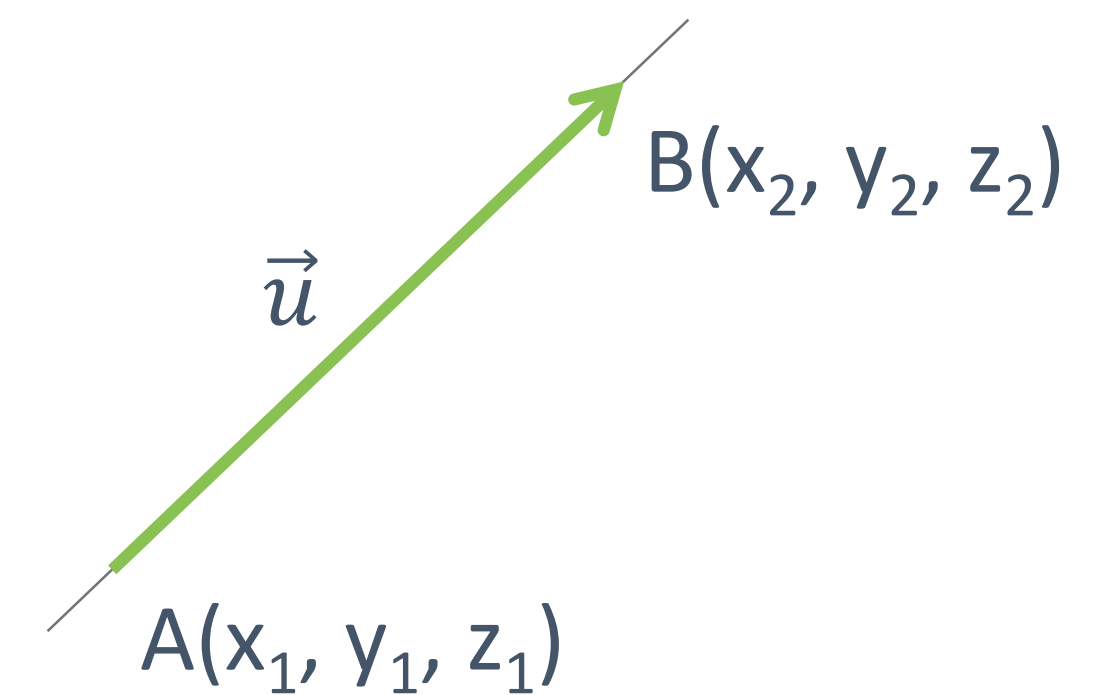
**skalar** opisuje wartość liczbowa wielkości fizycznej (mechanicznej) poprzez porównanie jej ze wzorcem (np. długość, masa, temperatura, praca, moc itp.). Skalarami są także wartości liczbowe (moduły) wektorów.

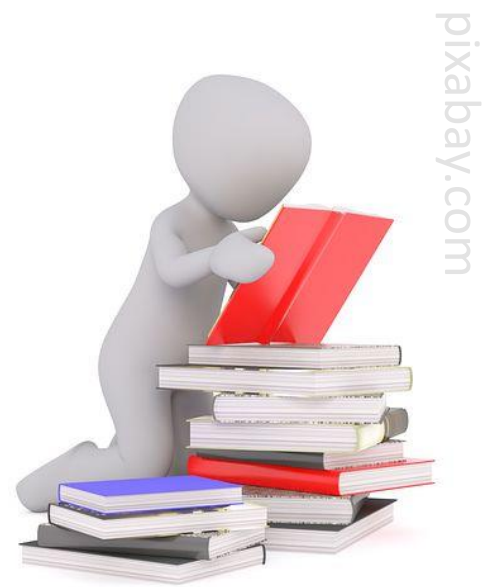
**wektor** obiekt geometryczny opisany za pomocą czterech parametrów:

- punkt przyłożenia  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,
- kierunek w przestrzeni,
- zwrot na kierunku działania,
- wartość lub długość (moduł)

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

- przykłady wektorów:  
siła, moment siły, ciężar, pęd, prędkość, przyspieszenie.

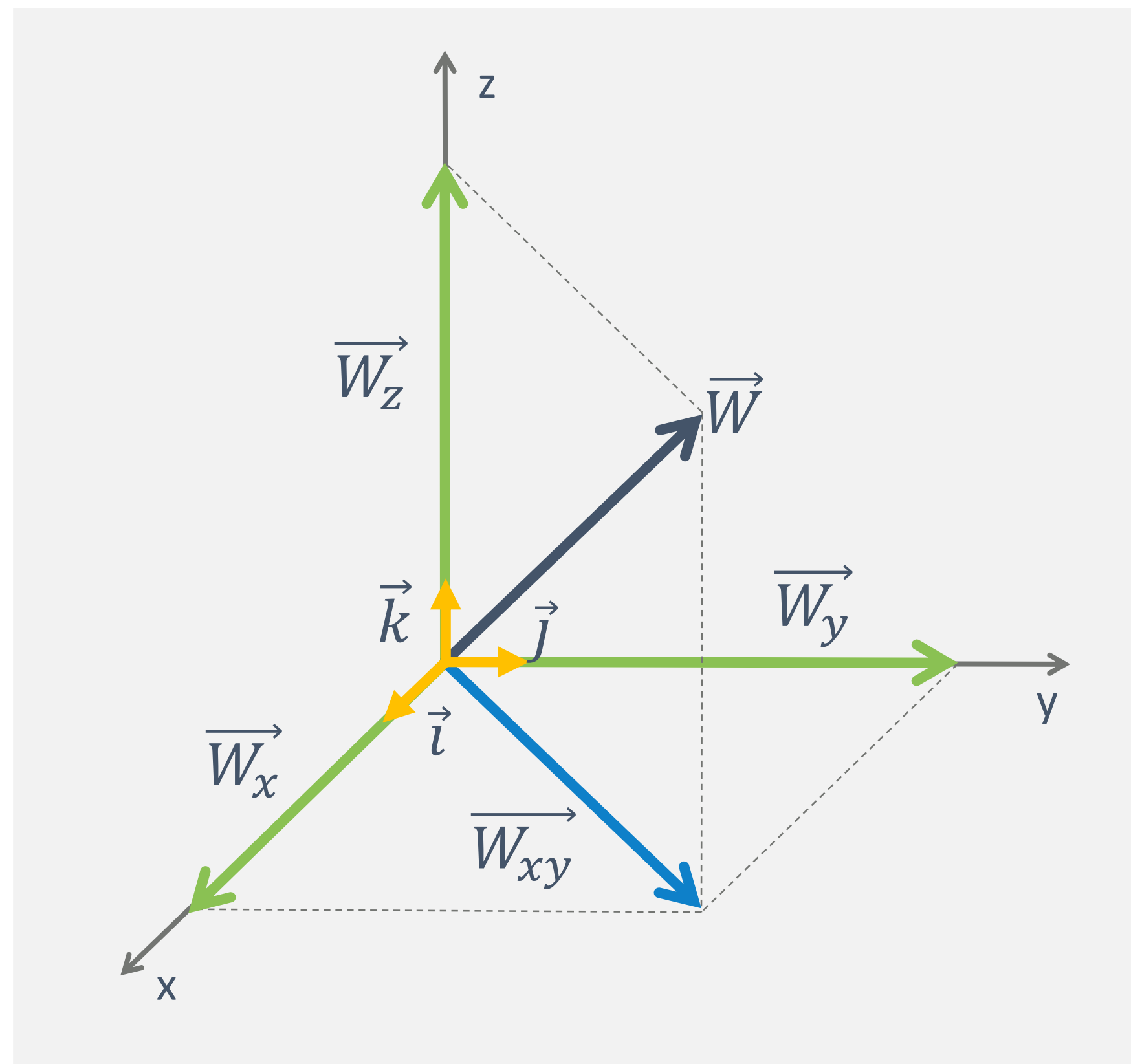




# Rachunek wektorowy

do samodzielnego powtórzenia

**wersor** osi wektor długości (normie) 1, o kierunku i zwrocie zgodnym z pewną dodatnią półosią prostokątnego układu współrzędnych. Dla osi  $OX, OY, OZ$  oznacza się je tradycyjnie:  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .



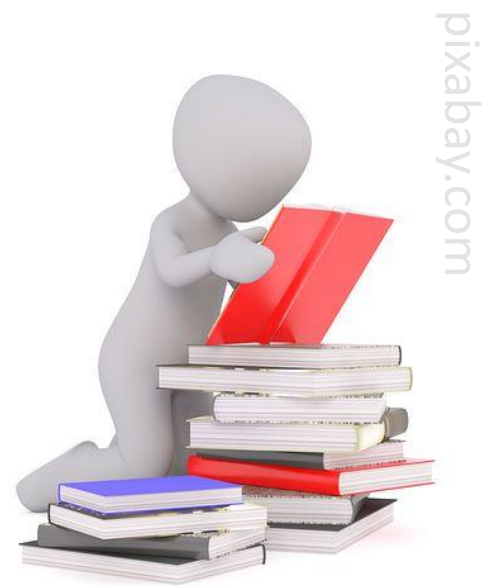
$$\vec{W} = (W_x, W_y, W_z),$$

$$\vec{W} = \vec{W}_x + \vec{W}_y + \vec{W}_z,$$

$$\vec{W} = W_x \cdot \vec{i} + W_y \cdot \vec{j} + W_z \cdot \vec{k}$$

gdzie  $\vec{W}$  - wektor wypadkowy.

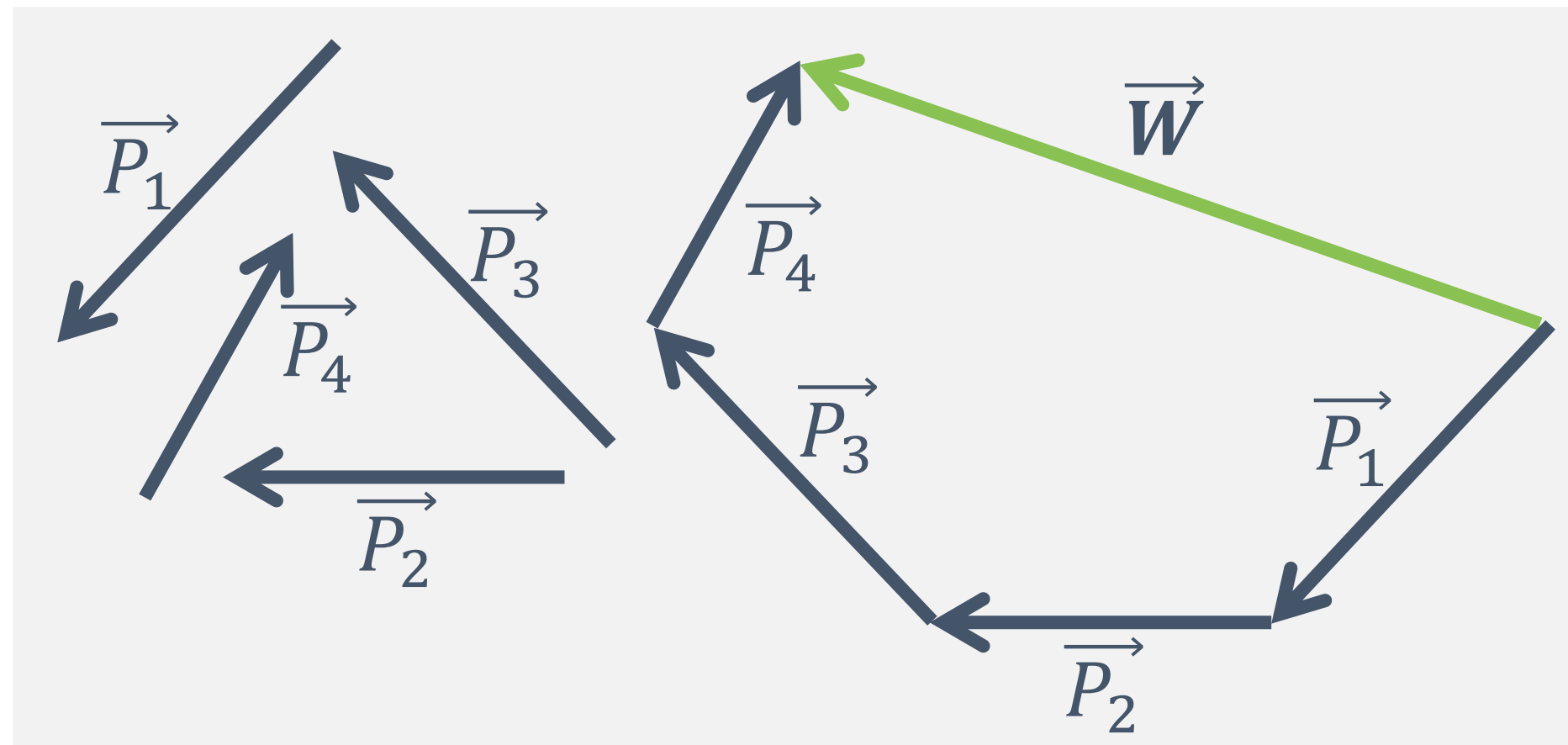




# Wybrane działania na wektorach

do samodzielnego powtórzenia

## Dodawanie

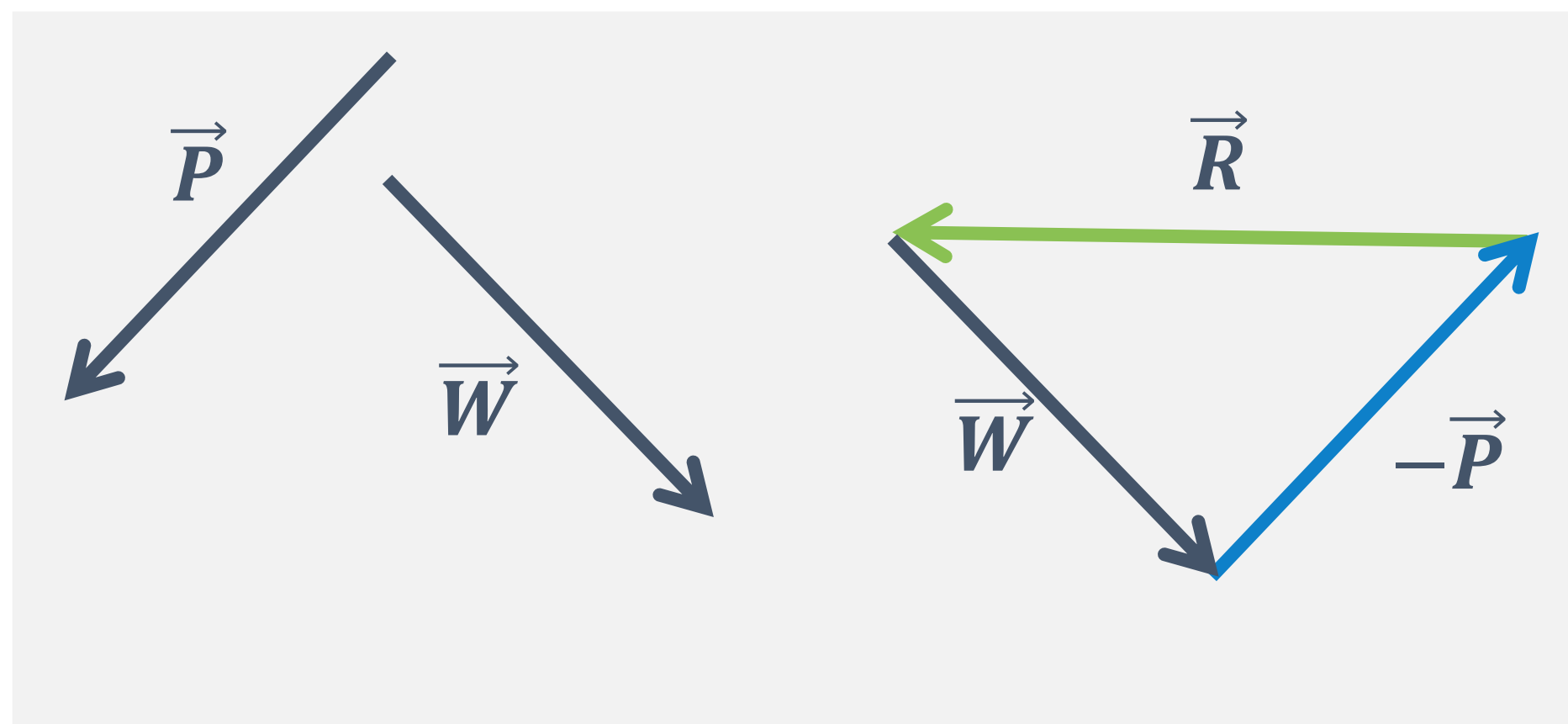


$$\vec{W} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \dots + \vec{P}_n$$

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

$$\vec{W} = \vec{W}_x + \vec{W}_y + \vec{W}_z$$

## Odejmowanie

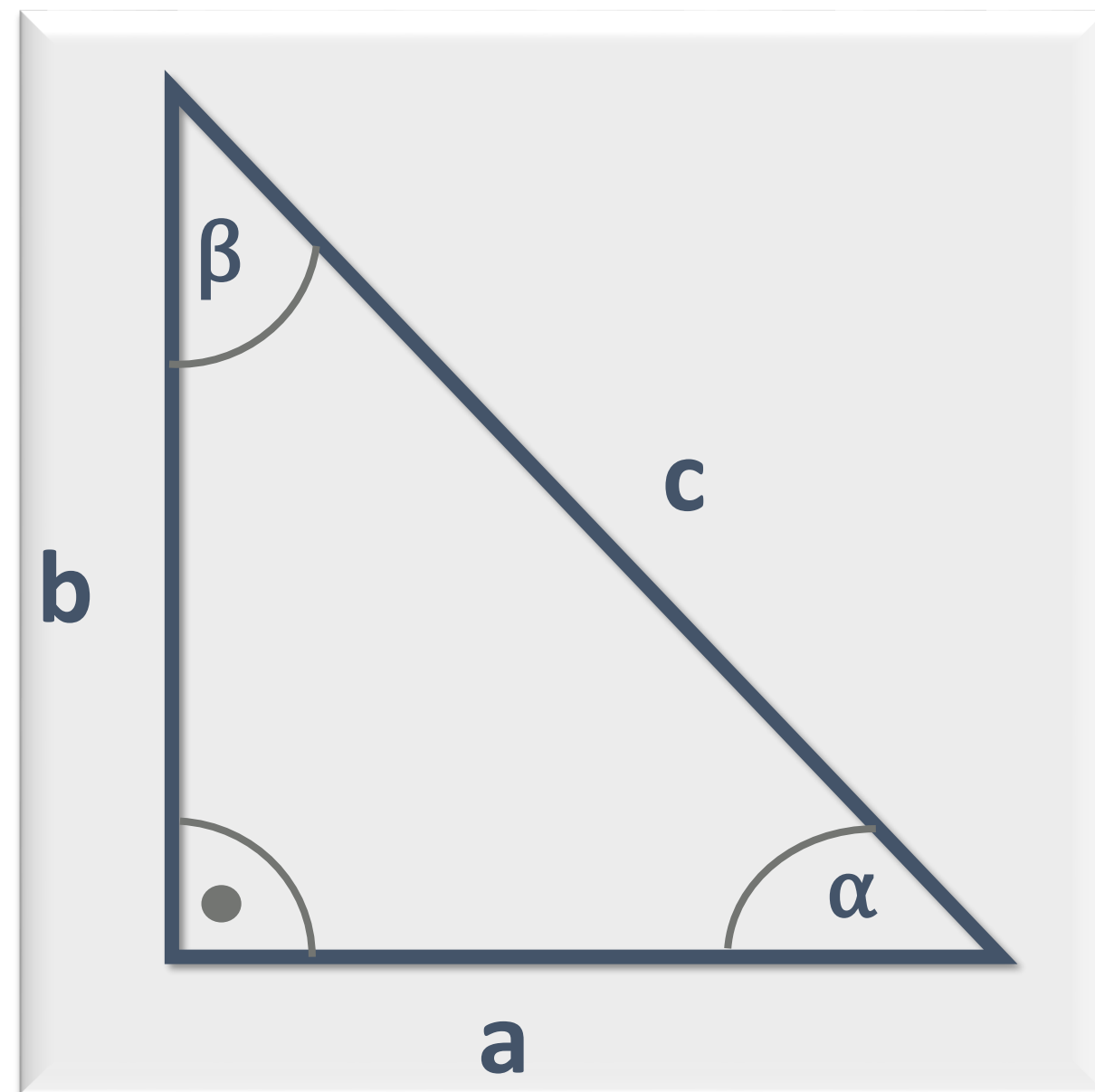


$$\vec{R} = \vec{W} - \vec{P} = \vec{W} + (-\vec{P})$$

gdzie  $\vec{R}$  - wektor główny

# Trygonometria

należy umieć na pamięć



$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

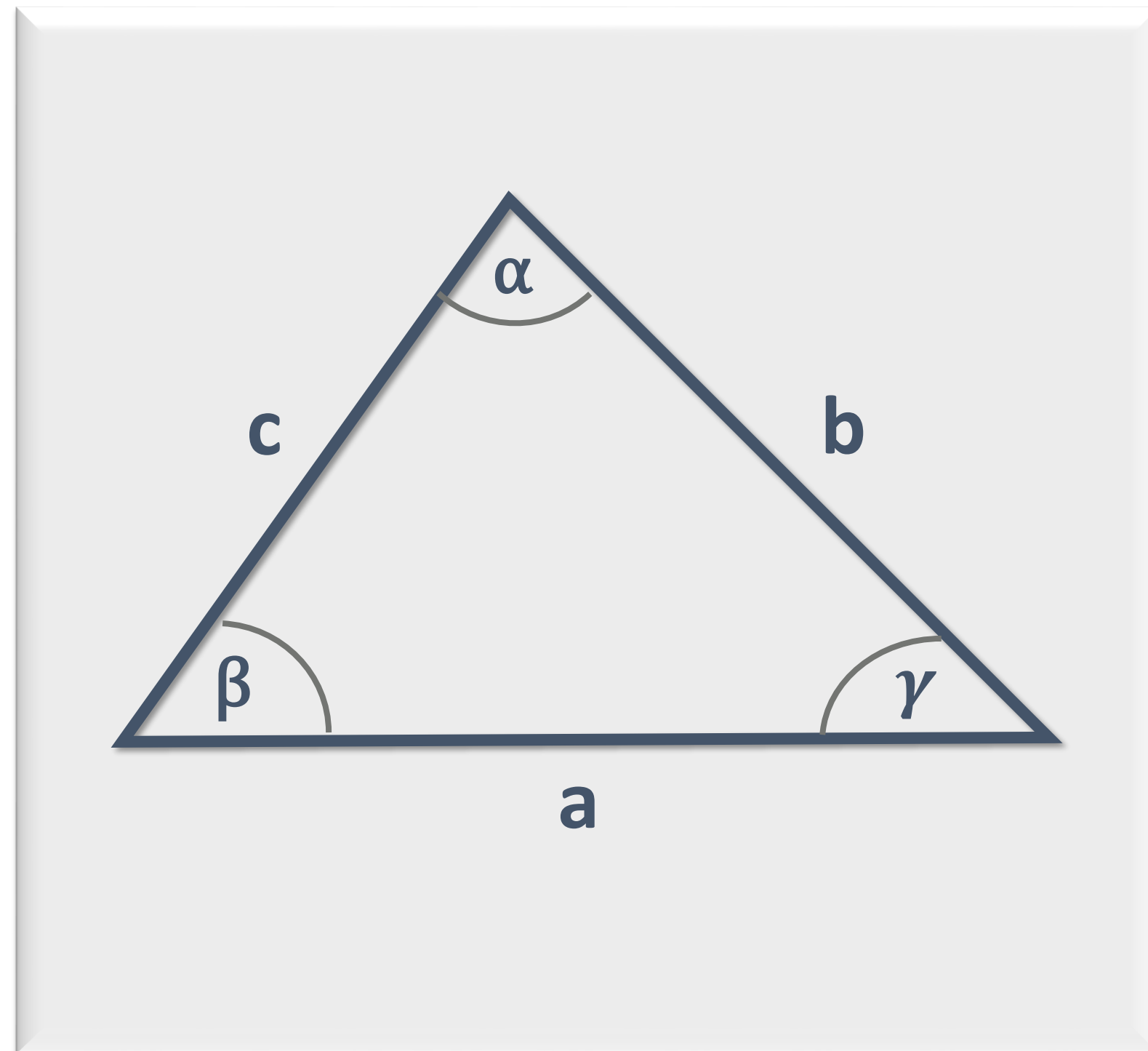
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$$





# Trygonometria

## Twierdzenie cosinusów



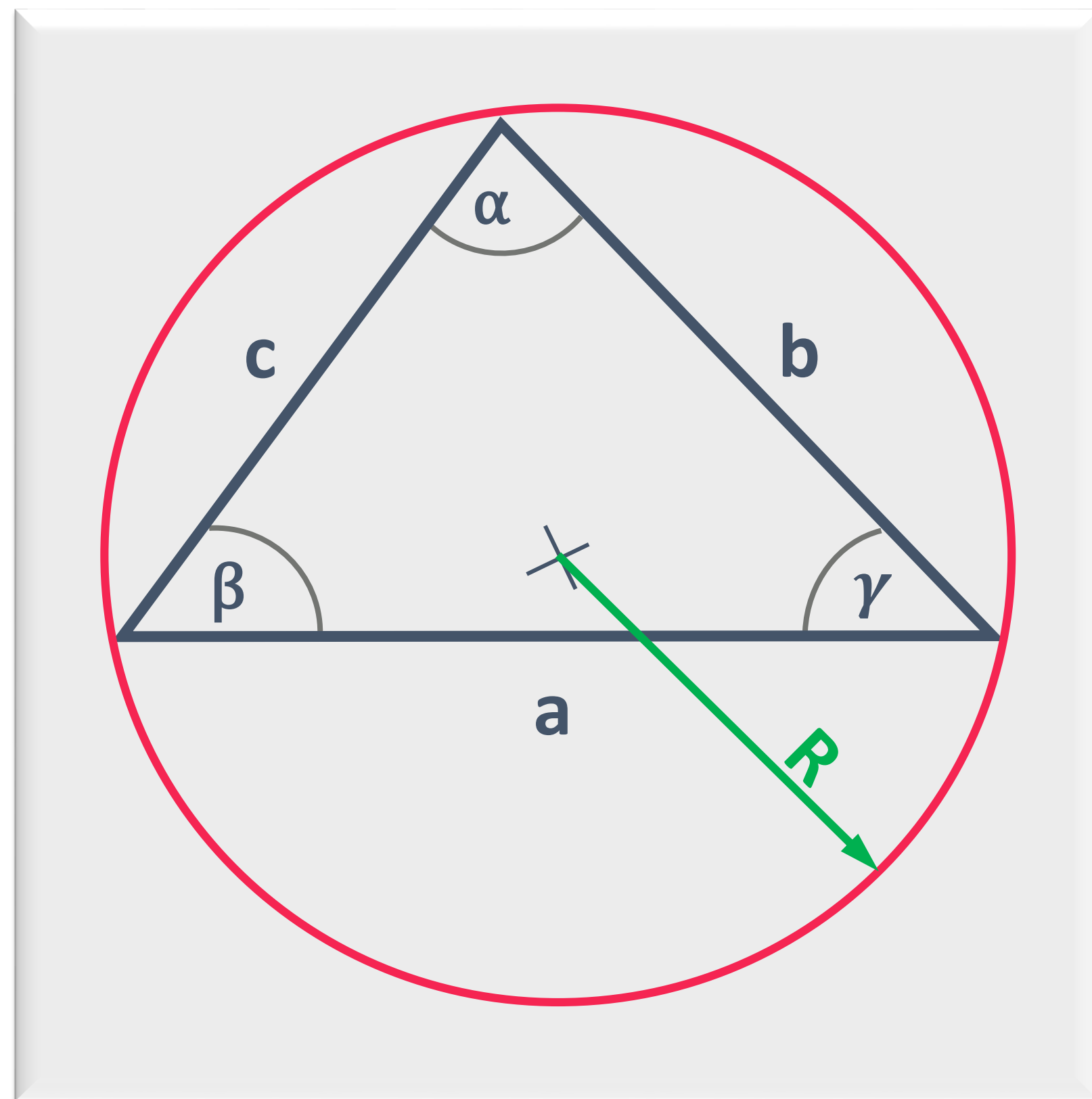
Kwadrat długości boku  $c$  (leżącego naprzeciw kąta  $\gamma$ ) trójkąta, jest równy sumie kwadratów długości boków  $a$  i  $b$  leżących przy tym kącie oraz podwojonego iloczynu długości tych boków i cosinusa kąta  $\gamma$ .

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$



# Trygonometria

## Twierdzenie cosinusów



W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa przeciwległego kąta jest stały i równa się długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



# POCHODNE, RÓŻNICZKI, CAŁKI

## WYBRANE POCHODNE

$$(C)' = 0$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x)' = 1$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

## WYBRANE RÓŻNICZKI

**Różniczka** – nieskończenie mała zmiana danej zmiennej. Przykładowo, jeśli zmienna oznaczana jest literą  $x$ , to zmiana jej wartości często oznaczana jest  $\Delta x$ ,  $dx$  reprezentuje podobną zmianę, lecz nieskończenie małą.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

## WYBRANE CAŁKI

**Całkowanie** to sumowanie nieskończenie wielu nieskończenie małych elementów.

$$\int 0 dx = C$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\int k dx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$