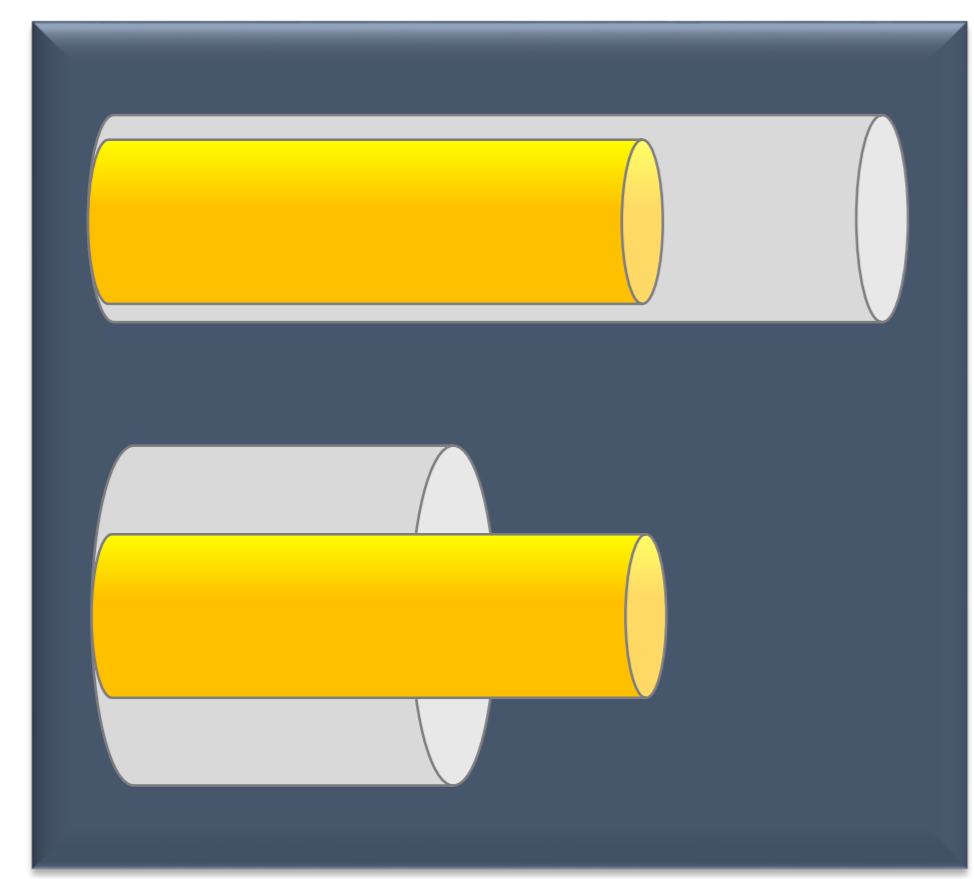


# SKRĘCANIE

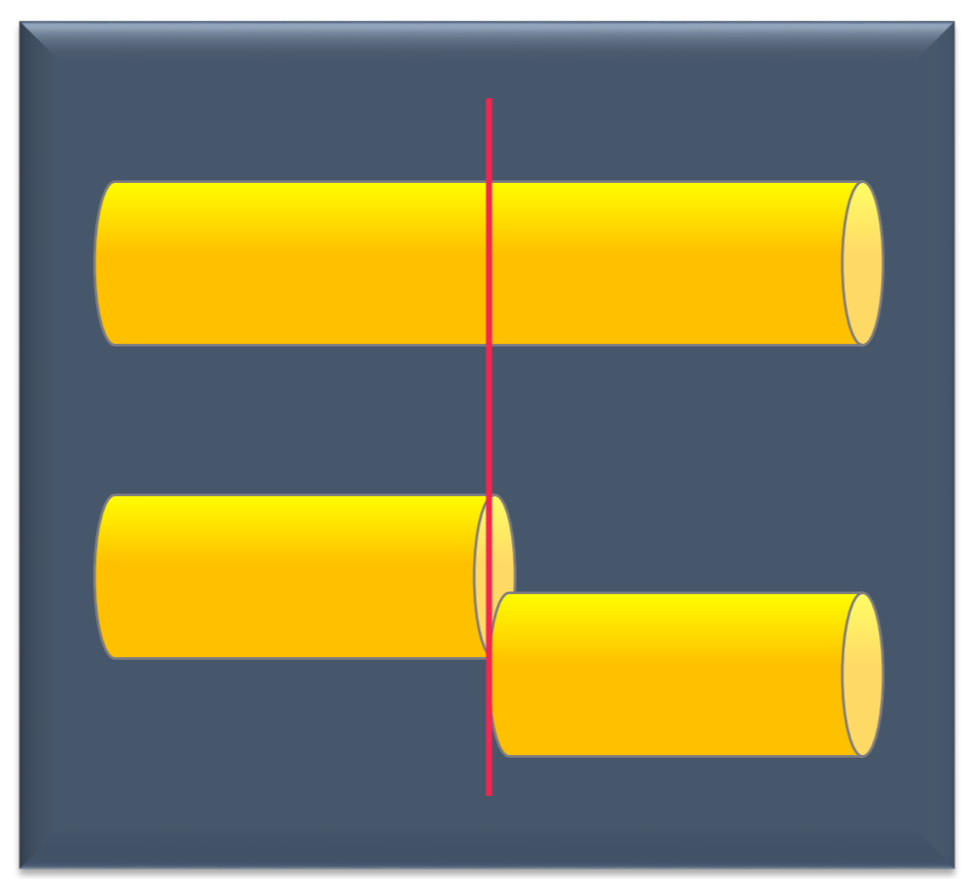


# Rodzaje obciążeń

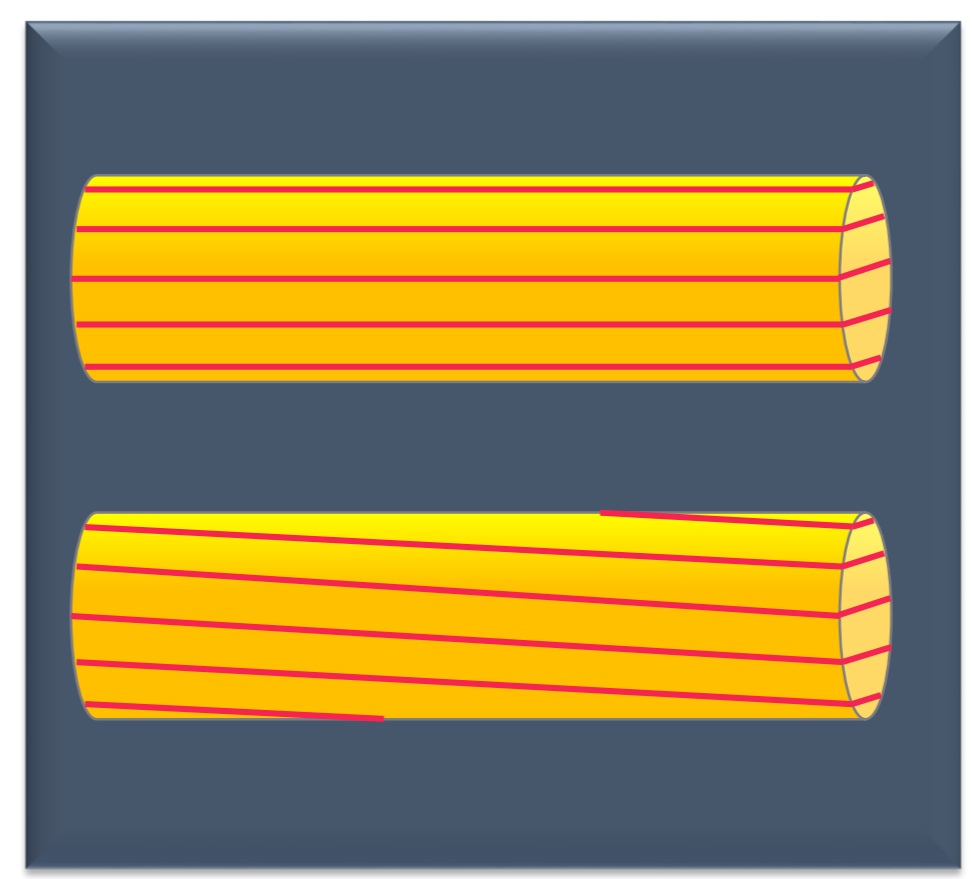
rozciąganie  
i ściskanie



ściananie  
techniczne



skręcanie



zginanie



# KONSTRUKCJE MECHANICZNE



[www.auto-swiat.pl](http://www.auto-swiat.pl)

Największy na świecie silnik wysokoprężny

## Wärtsilä-Sulzer RTA96-C

- 14 cylindrów, każdy o pojemności 1820 l,
- Moc 109 000 KM,
- Moment obrotowy 7 600 000 Nm,
- Spalanie 160 g paliwa w każdym tłoku na każdy cykl pracy,
- Waga 2,3 tys. ton,
- Wysokość 13 m,
- Długość 27 m.

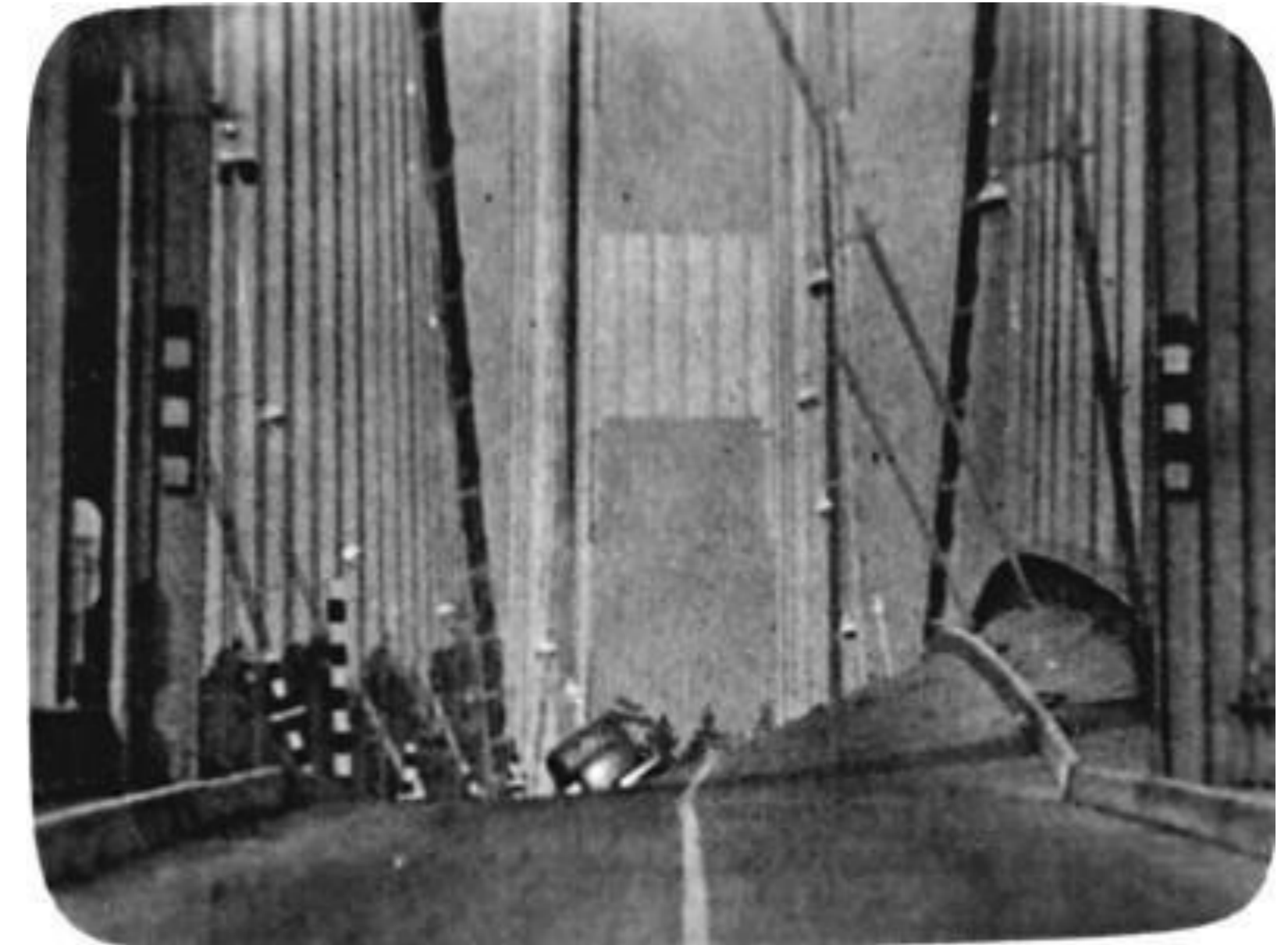
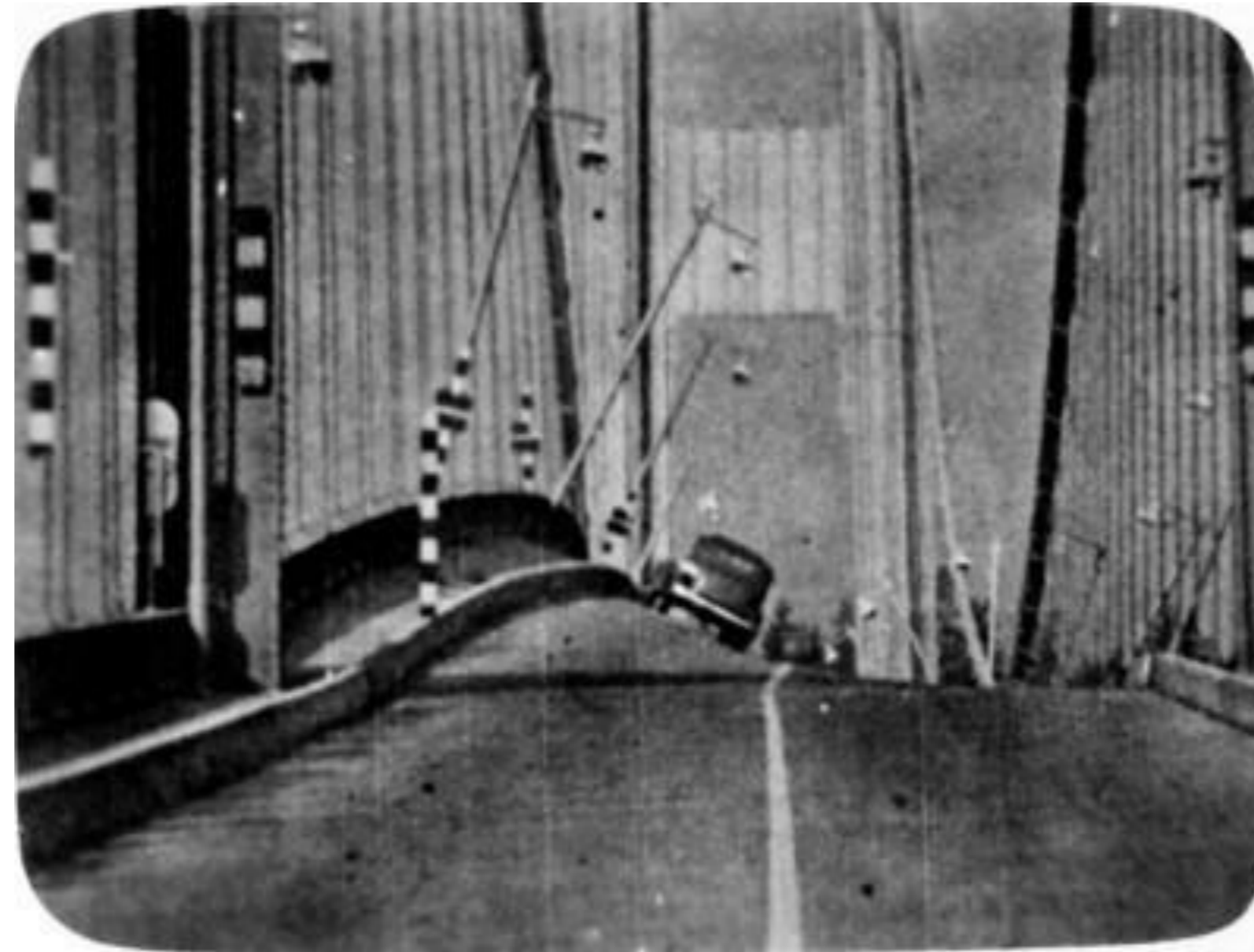
# KONSTRUKCJE MECHANICZNE



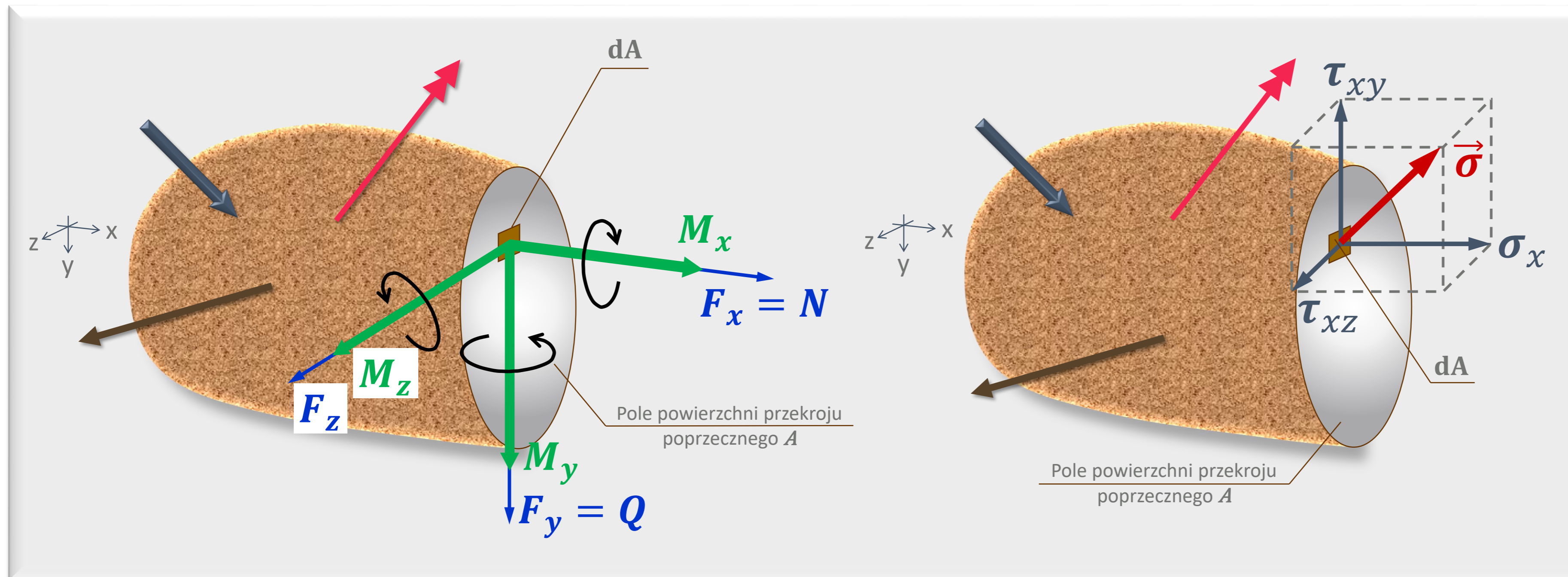
# SKRĘCANIE NA CODZIEŃ



# SKRĘCANIE KONSTRUKCJI



# Siły wewnętrzne i naprężenia w pręcie



Ostwald M. *Podstawy wytrzymałość materiałów i konstrukcji*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2017 r.

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$F_y = \int_A \tau_{yx} dA$$

$$F_z = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$T = \sqrt{F_y^2 + F_z^2}$$

## SKRĘCANIE

$$M_s = \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{yx}z) dA$$

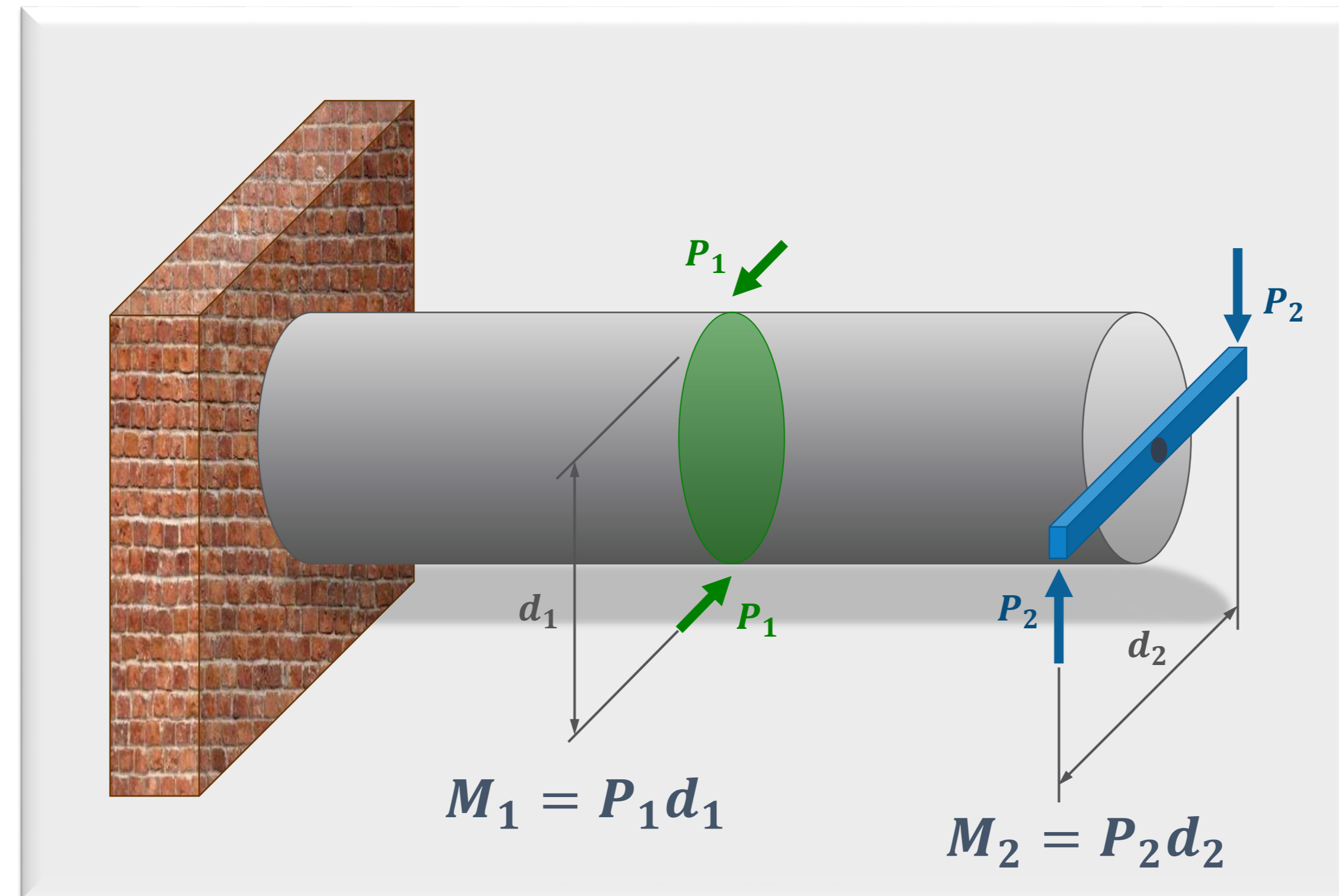
$$M_y = \int_A \sigma_x z dA$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA$$

# MODEL SKRĘCENIA WAŁU



**Skrećenie** wału jest efektem działania dwóch par sił ( $P_1P_1$ ) oraz ( $P_2P_2$ ) o przeciwnych zwrotach, znajdujących się w dwóch różnych płaszczyznach, prostopadłych do osi wału i oddalonych od siebie. Pary sił  $P_1$  oraz  $P_2$  tworzą momenty skręcające  $M_1$  oraz  $M_2$ .



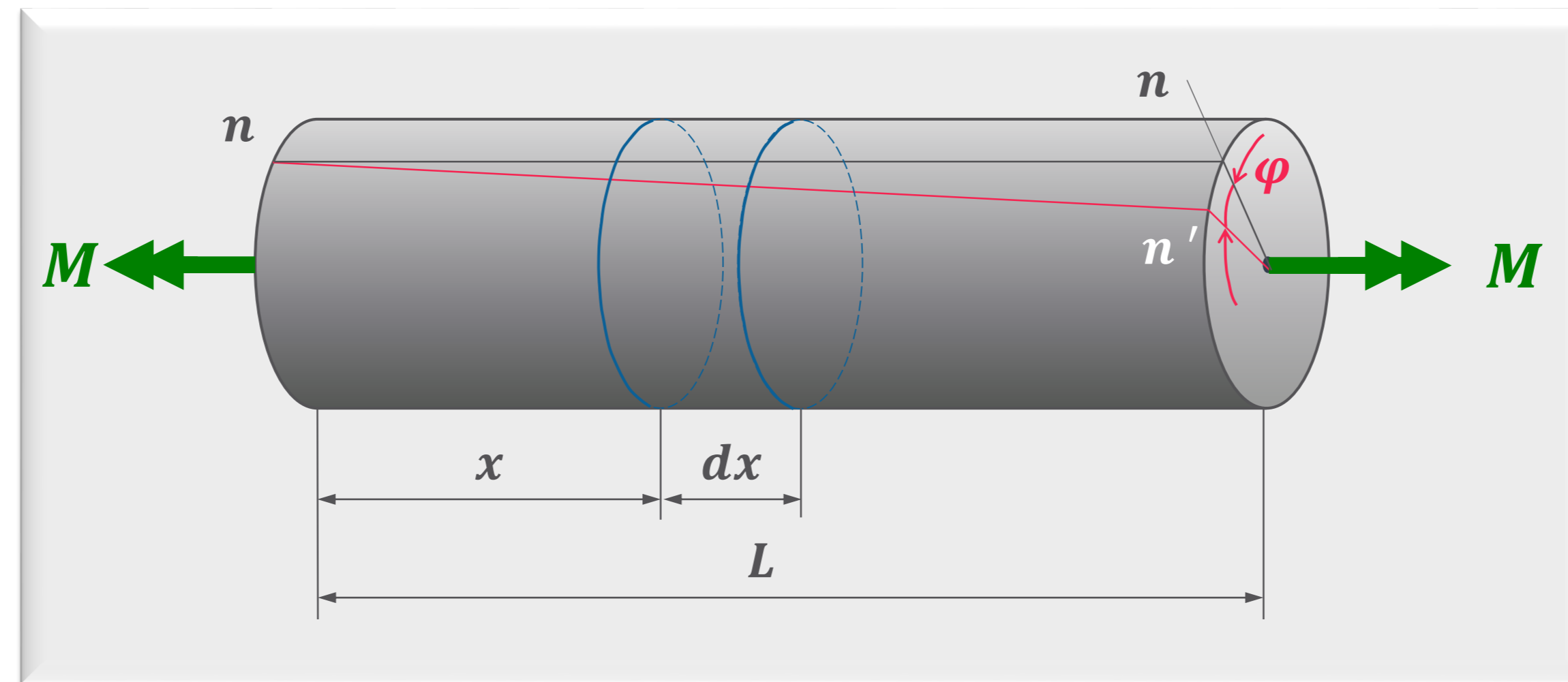


# ODKSZTAŁCENIE WAŁU



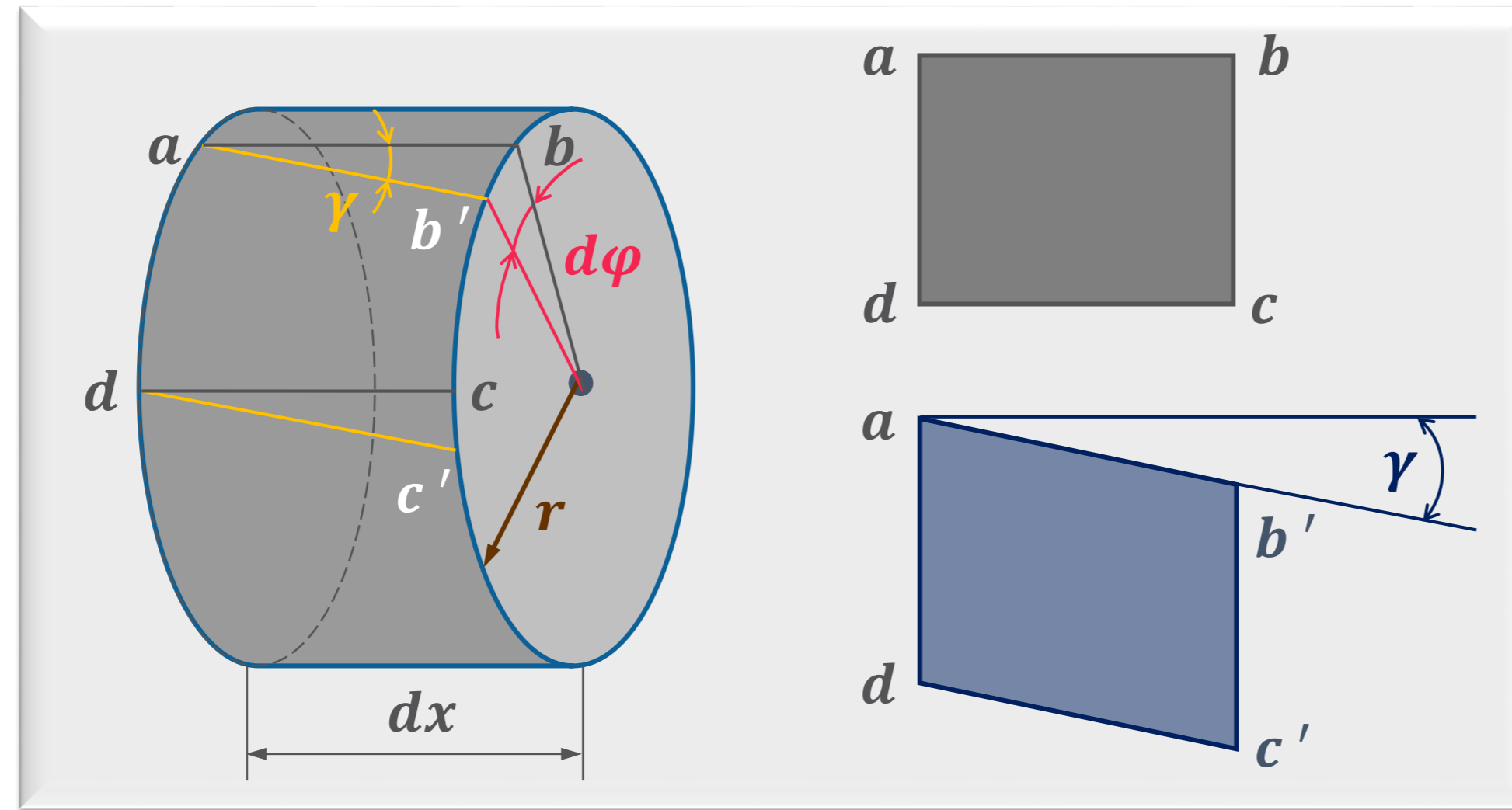
## Założenia modelowe

- Oś wału jest linią prostą,
- Przekroje płaskie, prostopadłe do osi pręta, po odkształceniu pozostają płaskie,
- Odległość między przekrojami jest stała.

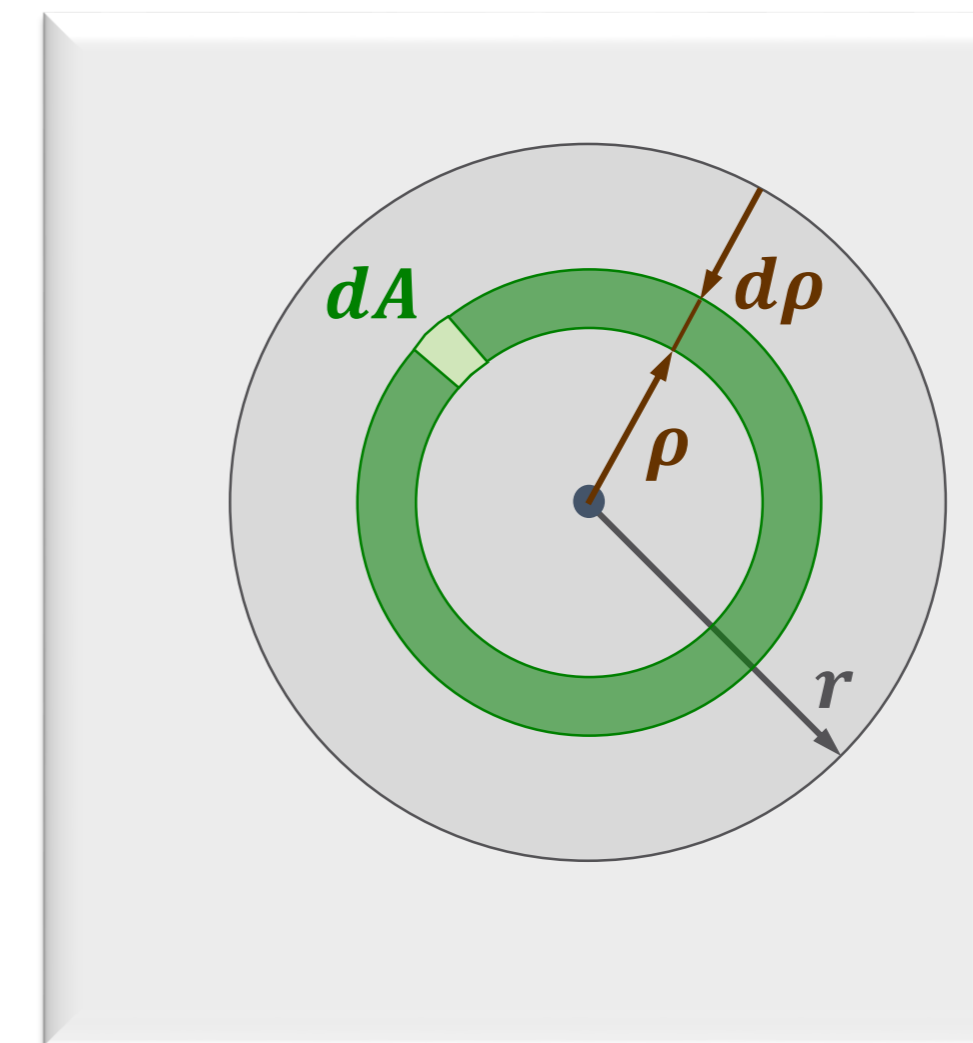


**Kąt skręcenia wału  $\varphi$**  – kąt, o który obrócą się względem siebie przekroje poprzeczne wału, oddalone od siebie o odległość  $L$ , do których zostały przyłożone momenty skręcające  $M$ .

# ODKSZTAŁCENIE WAŁU



Odkształcenie powierzchni bocznej



Odkształcenie wewnętrznego cylindra

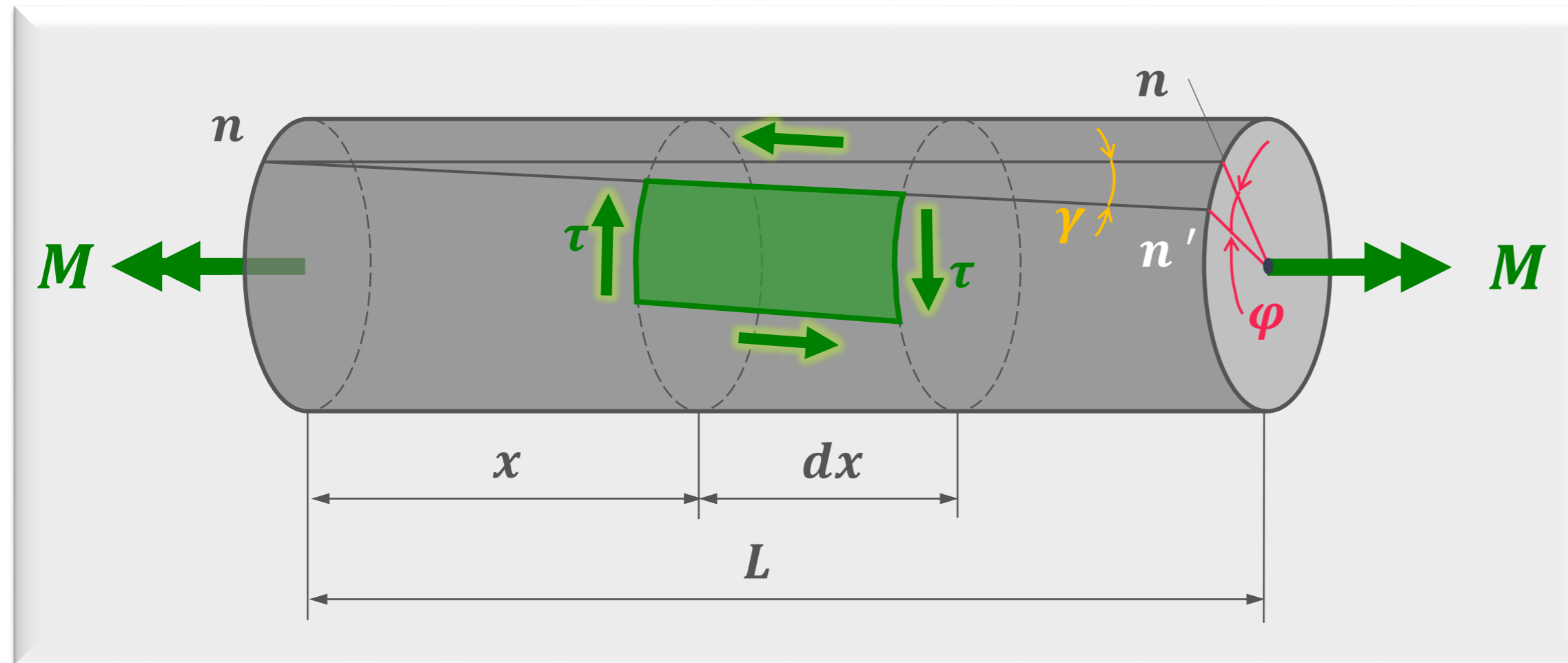
$$\gamma dx = r d\varphi \quad \longrightarrow \quad \gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\gamma_\rho dx = \rho d\varphi \quad \longrightarrow \quad \gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\rho_{max} = r$$

**Kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma$**  – kąt nachylenia tworzącej ( $ab$ ), która po skręceniu przyjmuje kształt *linii śrubowej* ( $ab'$ ).

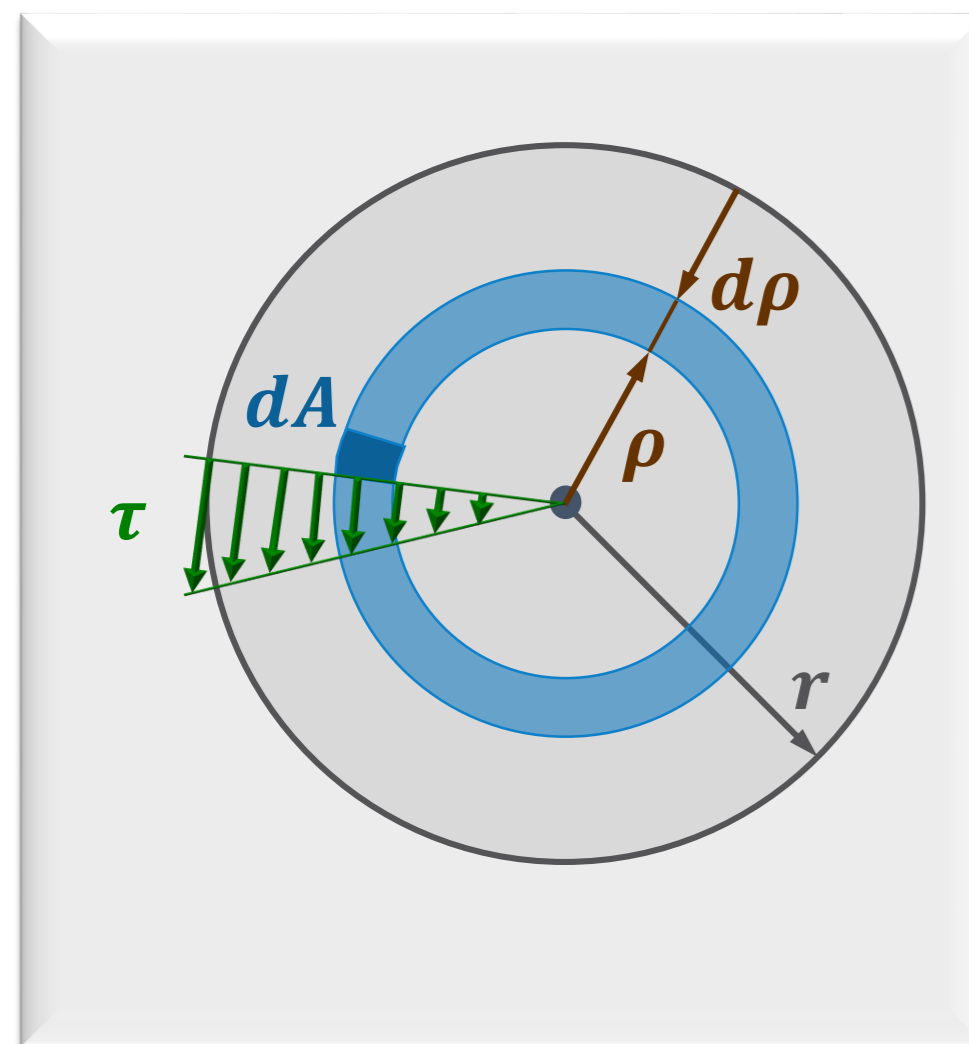
# Związek między naprężeniem i odkształceniem



Prawo Hooke'a przy skręcaniu (ściananiu)

$$\tau = \gamma G$$

$$\tau = r \frac{d\varphi}{dx} G \quad \tau_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx} G$$



Naprężenia tnące  $\tau$  oraz  $\tau_\rho$  w dowolnym elemencie  $dA$  przekroju poprzecznego są prostopadłe do promienia i proporcjonalne do odległości  $\rho$  elementu od osi pręta. Największe naprężenia ścinające występują na obwodzie przekroju poprzecznego.

$$\tau_{max} = r \frac{d\varphi}{dx} G$$

# Warunek bezpieczeństwa na skręcanie



$$\int_A \tau_\rho \cdot dA$$

Elementarna siła tnąca

Warunek równowagi

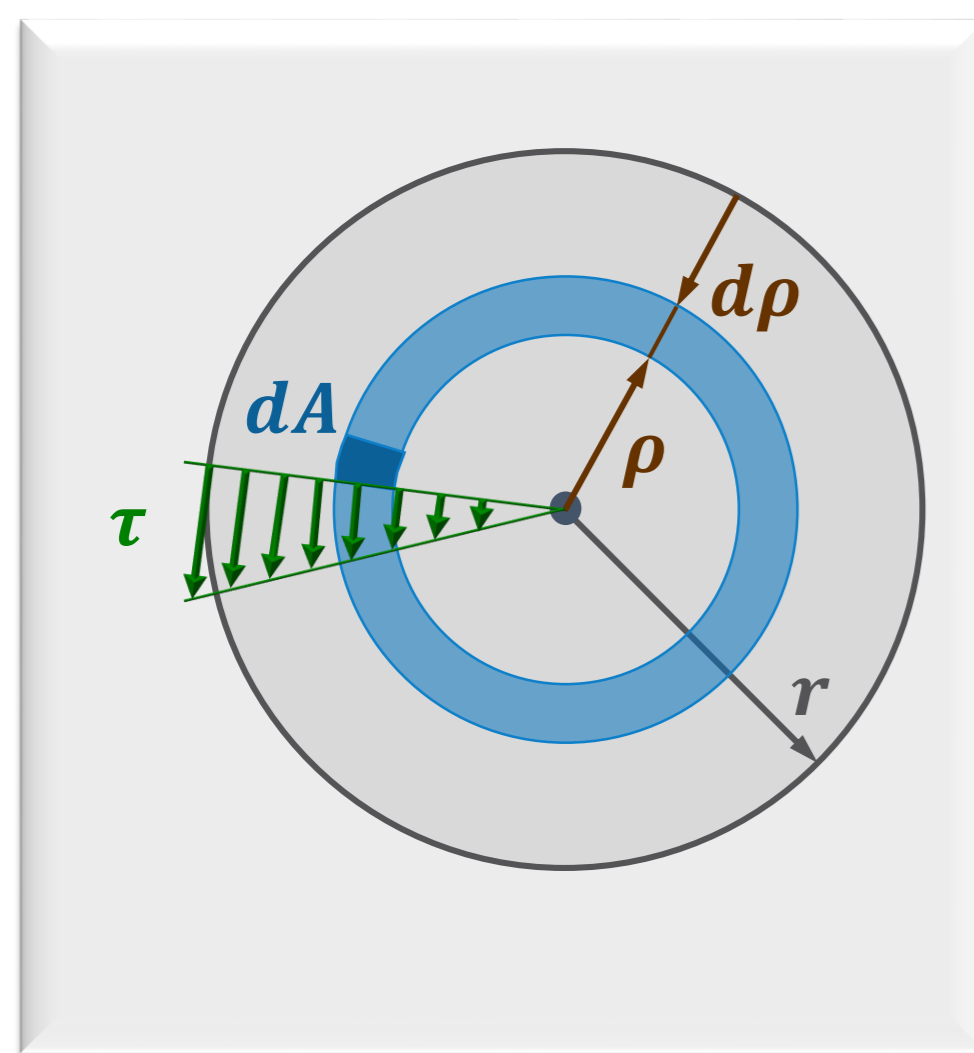
$$\int_A \tau_\rho \cdot dA \cdot \rho - M_S = 0$$

$$M_S = \int_A \rho \frac{d\varphi}{dx} G \cdot dA \cdot \rho = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 \cdot dA$$

$I_0$

$$\tau_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx} G$$

$$M_S = G \frac{d\varphi}{dx} I_0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_S}{GI_0}$$

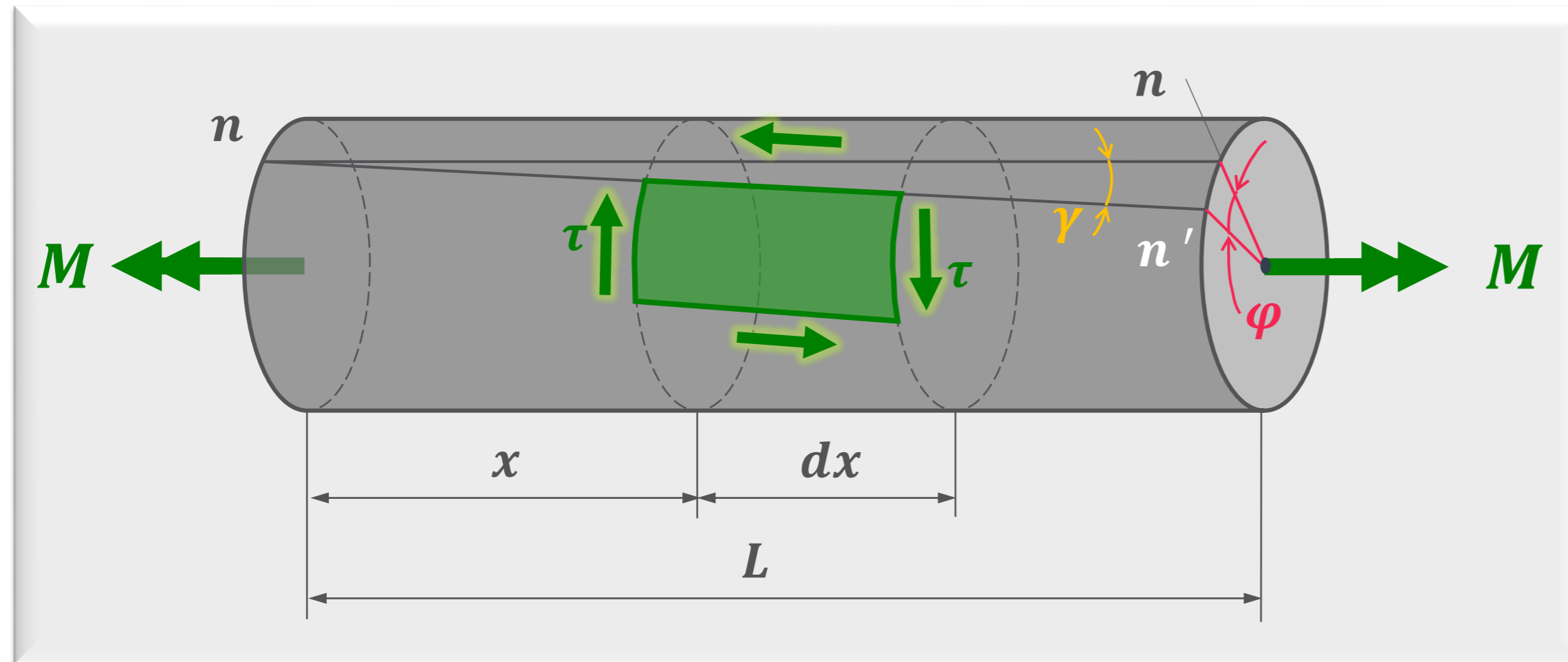


$$\tau_\rho = \rho \frac{M_S}{GI_0} G \Rightarrow \tau_\rho = \rho \frac{M_S}{I_0}, \text{ oraz } \rho_{max} = r$$

**Maksymalne naprężenia skręcające (tnące)**

$$\tau_{max} = r \frac{M_S}{I_0}$$

# Warunek bezpieczeństwa na skręcanie



$$\tau_{max} = r \frac{M_S}{I_0}$$



$$\tau_{max} = \frac{M_S \max}{W_0}$$

gdzie

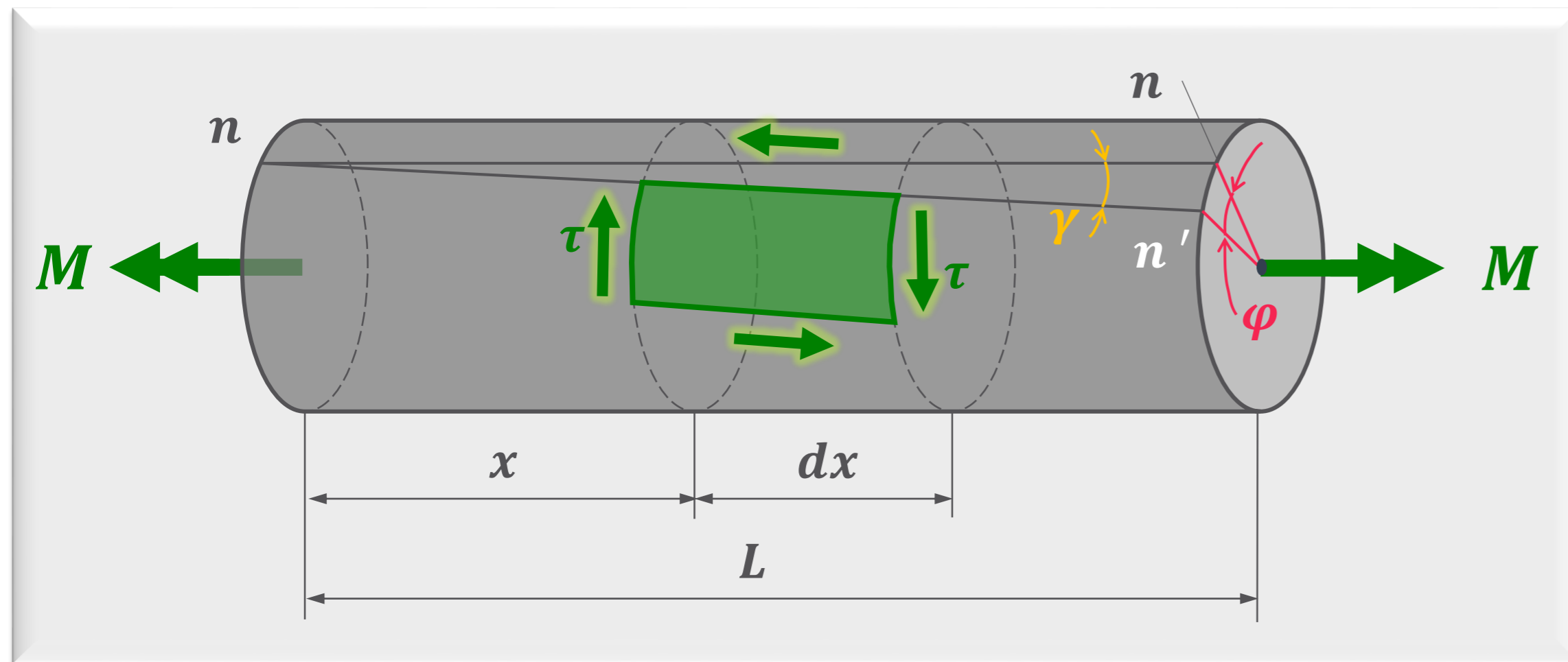
$$W_0 = \frac{I_0}{\rho_{max}}$$

Wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcania

$$\tau_{max} = \frac{M_S}{W_0} \leq \tau_{dop} = k_S$$

$k_S$  - dopuszczalne naprężenia skręcające

# Warunek sztywności na skręcanie



$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_S}{GI_0} \Rightarrow \varphi = \frac{M_S}{GI_0} \int_A dx \Rightarrow \varphi = \frac{M_S}{GI_0} \cdot r + C$$

$$\begin{matrix} x = 0 \\ \varphi = 0 \end{matrix} \Rightarrow C = 0$$

Warunki brzegowe

$$\varphi = \frac{M_S}{GI_0} \cdot r \Rightarrow \varphi(x) = \frac{M_S}{GI_0} \cdot x \text{ oraz } x = l \Rightarrow \varphi(l) = \frac{M_S \cdot l}{G \cdot I_0}$$

$$\varphi = \frac{M_S \cdot l}{G \cdot I_0} \leq \varphi_{dop}$$

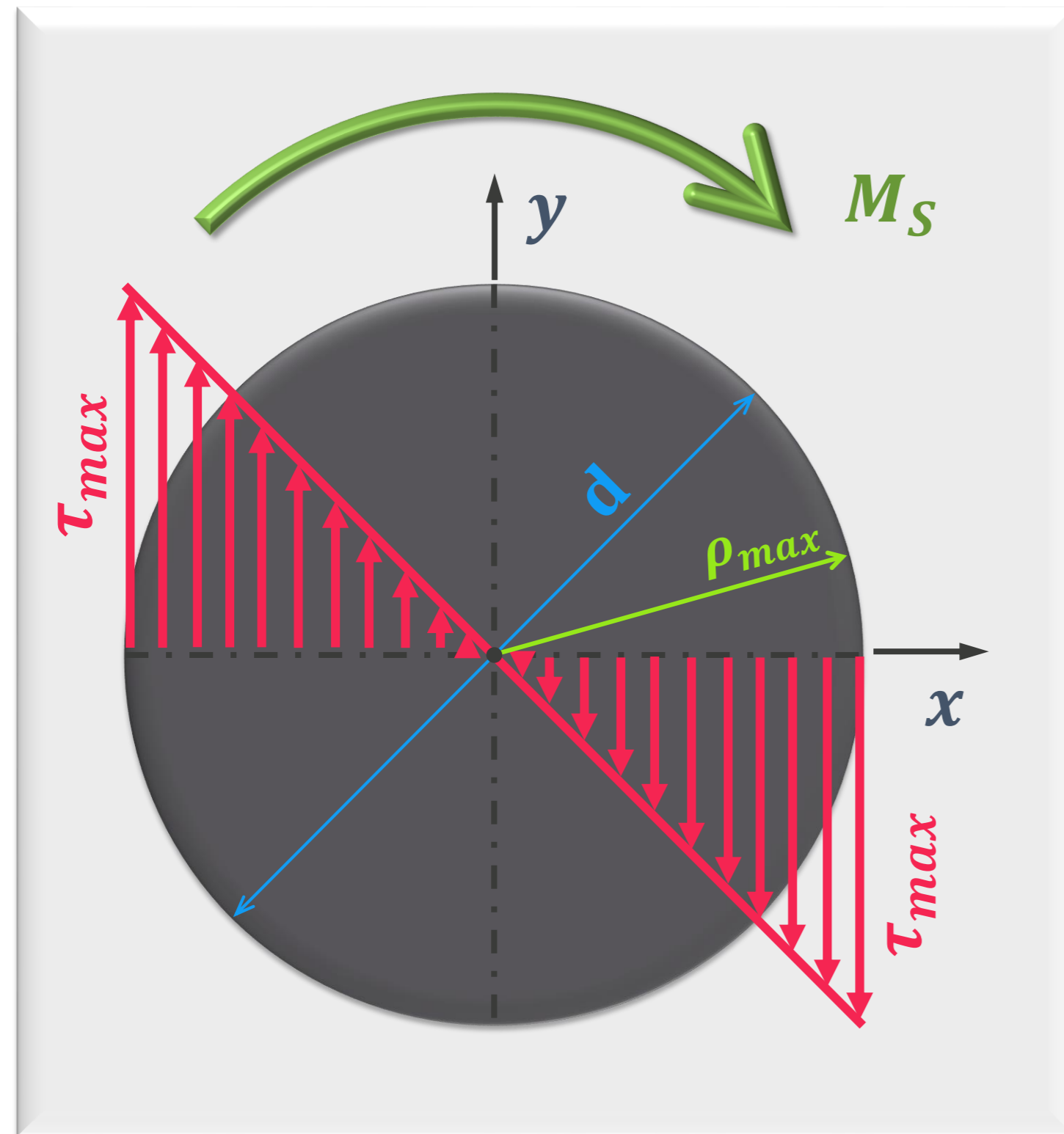
$\varphi_{dop}$  - dopuszczalny kąt skręcenia

$G \cdot I_0$  - sztywność skręcenia

# Rozkład naprężeń skręcających

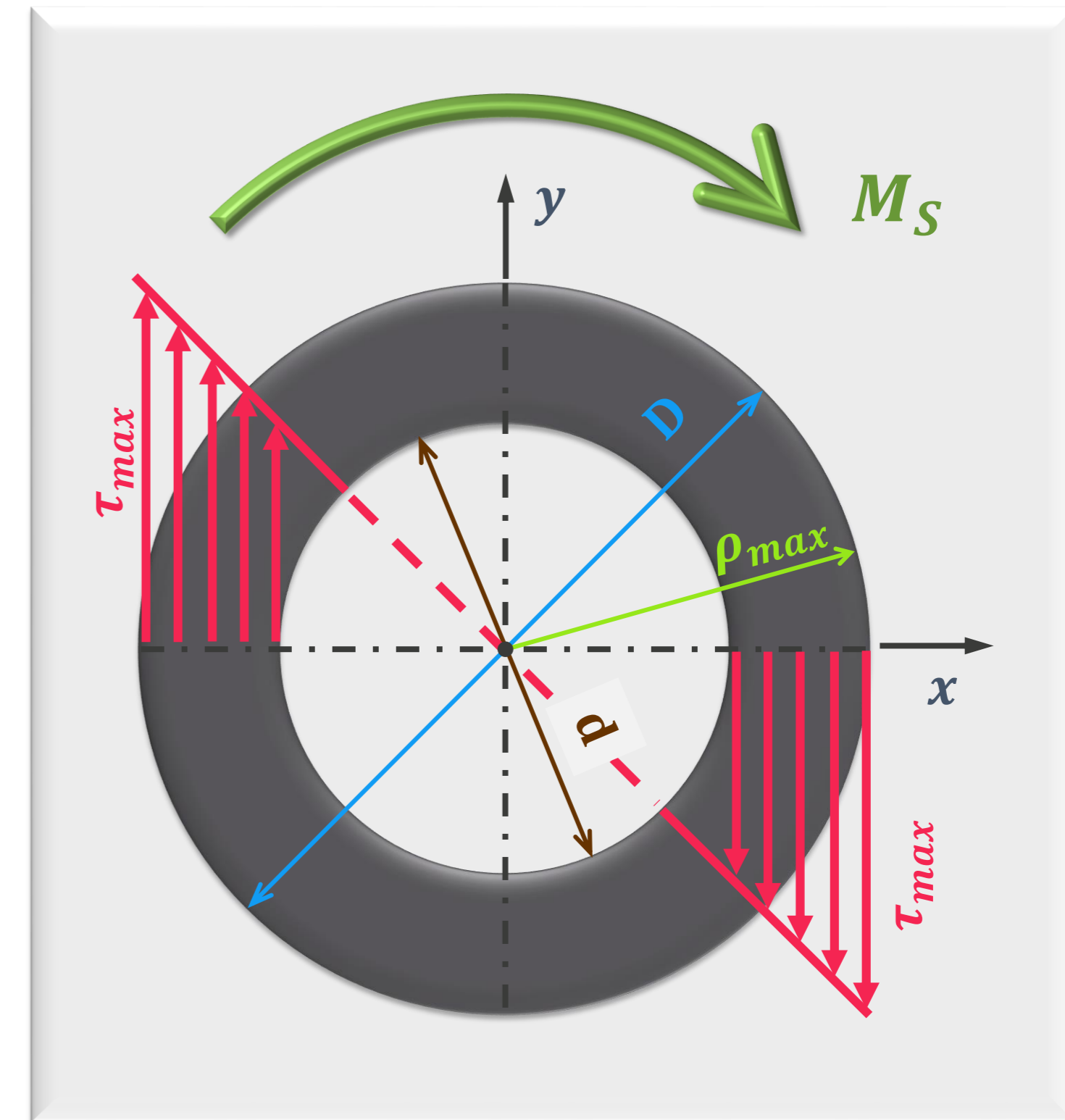


## Przekroje kołowo symetryczne

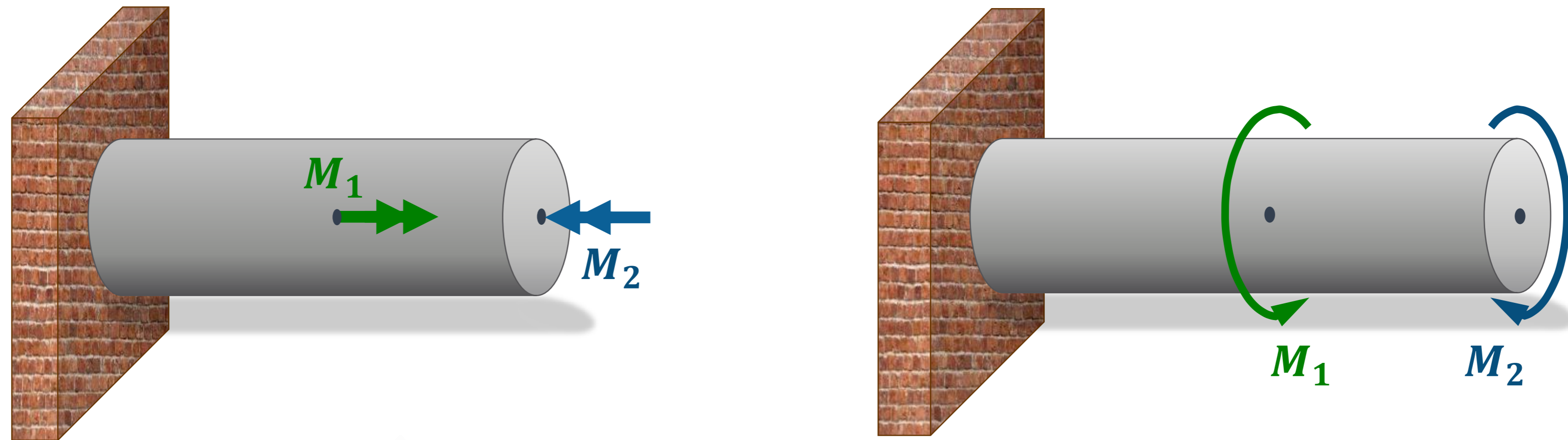


$$\tau_{max} = \frac{M_S}{W_0} = \frac{M_S}{I_0} \rho_{max}$$

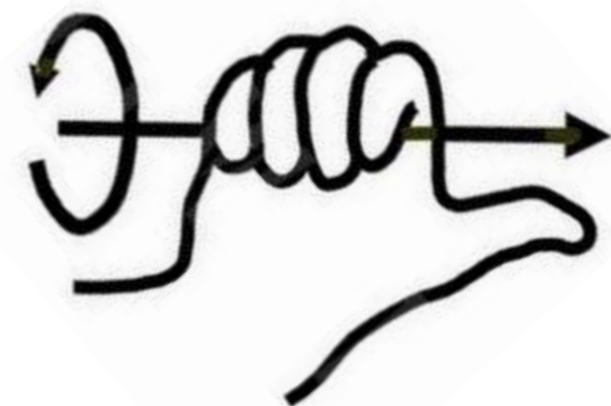
$$\varphi = \frac{M_S \cdot l}{G \cdot I_0}$$



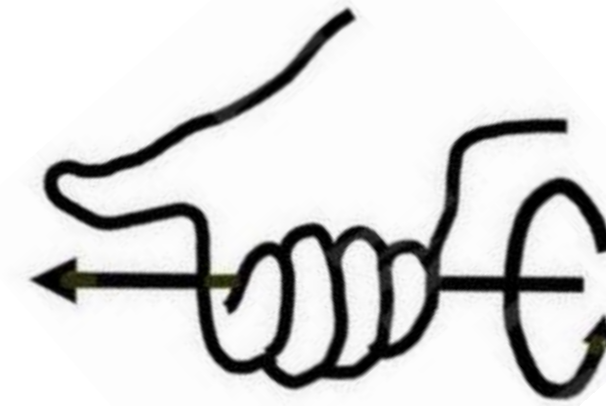
# Oznaczenia momentu skręcającego



Reguła prawej dłoni



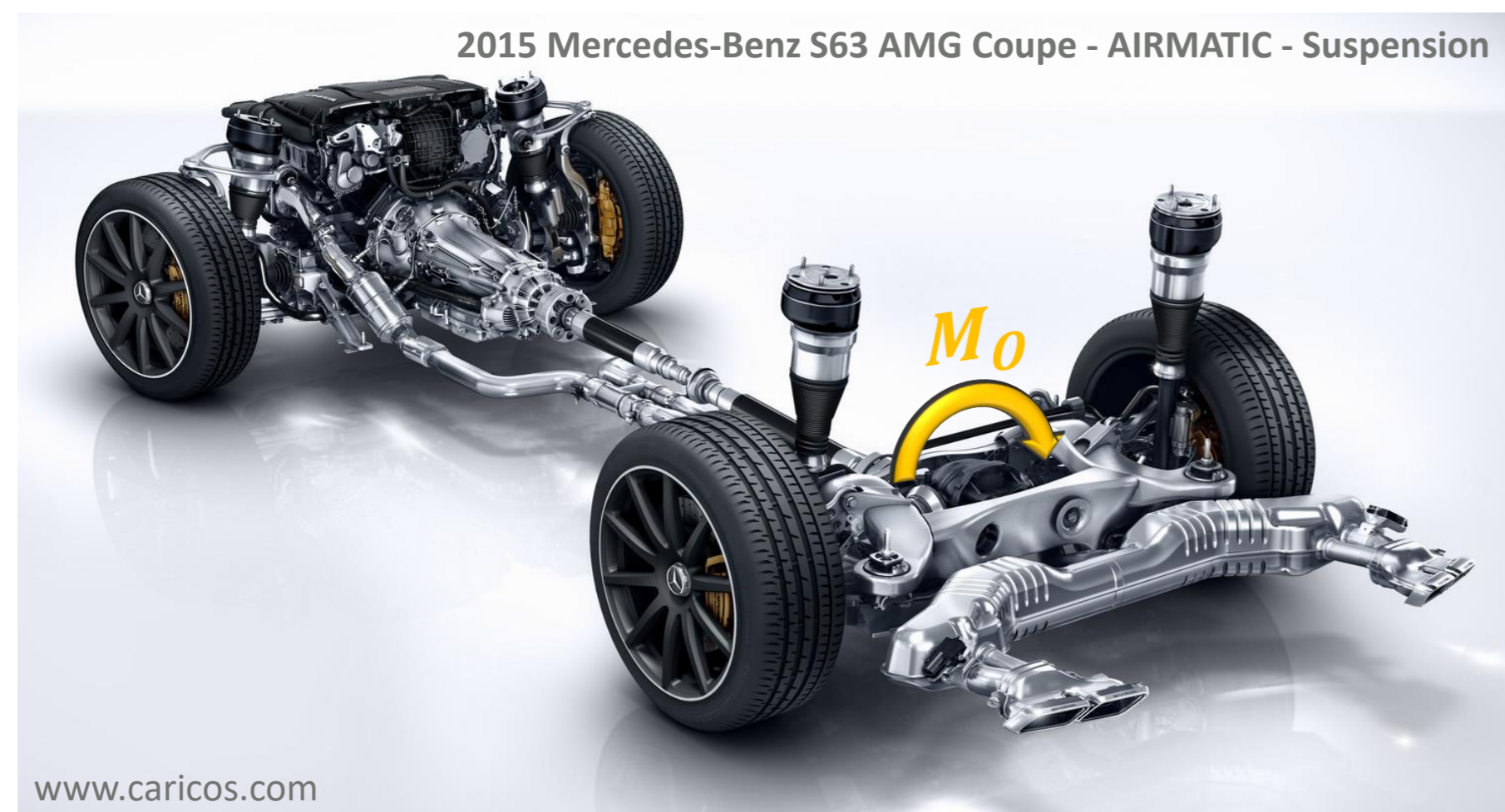
$$M > 0$$



$$M < 0$$



# SKRĘCANIE WAŁÓW OBROTOWYCH



Zależność między mocą  $N$  a momentem obrotowym  $M_0$

$$N = M_0 \cdot \omega \quad \left[ W = Nm \cdot \frac{1}{s} \right]$$

$M_0$  - moment obrotowy [ $Nm$ ],

$\omega$  - prędkość kątowa [ $\frac{1}{s}$ ]

Jeżeli  $\rightarrow$  ✓ prędkość obrotowa  $n$  [ $obr/min$ ]  
✓ moc  $N$  [ $kW$ ]  $\rightarrow$  to  $\rightarrow$   $M_0 = \frac{N}{\omega}$   
 $\omega = \frac{\pi n}{30}$   $M_0[Nm] = \frac{10^3 \cdot N[kW]}{\pi/30 \cdot n [obr/min]}$

$$M_0 \cong 9550 \frac{N[kW]}{n [obr/min]} [Nm]$$

# SKRĘCANIE



## Procedura rozwiązywania zagadnień skręcania

1. Uwolnić od więzów – warunki równowagi konstrukcji,
2. Zaznaczyć przekroje myślowe pręta,
3. Wyznaczyć momenty skręcające w każdym przekroju

$$\sum M = 0,$$

4. Wyznaczyć naprężenia tnące w każdym przekroju

$$\tau = \frac{M}{W_0} [MPa],$$

- Wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie
- Biegunowy moment bezwładności

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{16} \quad \text{lub} \quad W_0 = \frac{J_0}{\frac{1}{2}D}$$

$$J_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

5. Wyznaczyć kąt skręcenia w każdym przekroju

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ_0} [rad],$$

- W zadaniach statycznie wyznaczalnych
- W zadaniach statycznie niewyznaczalnych

$$\varphi_C = \varphi_I + \varphi_{II} + \dots \neq 0$$

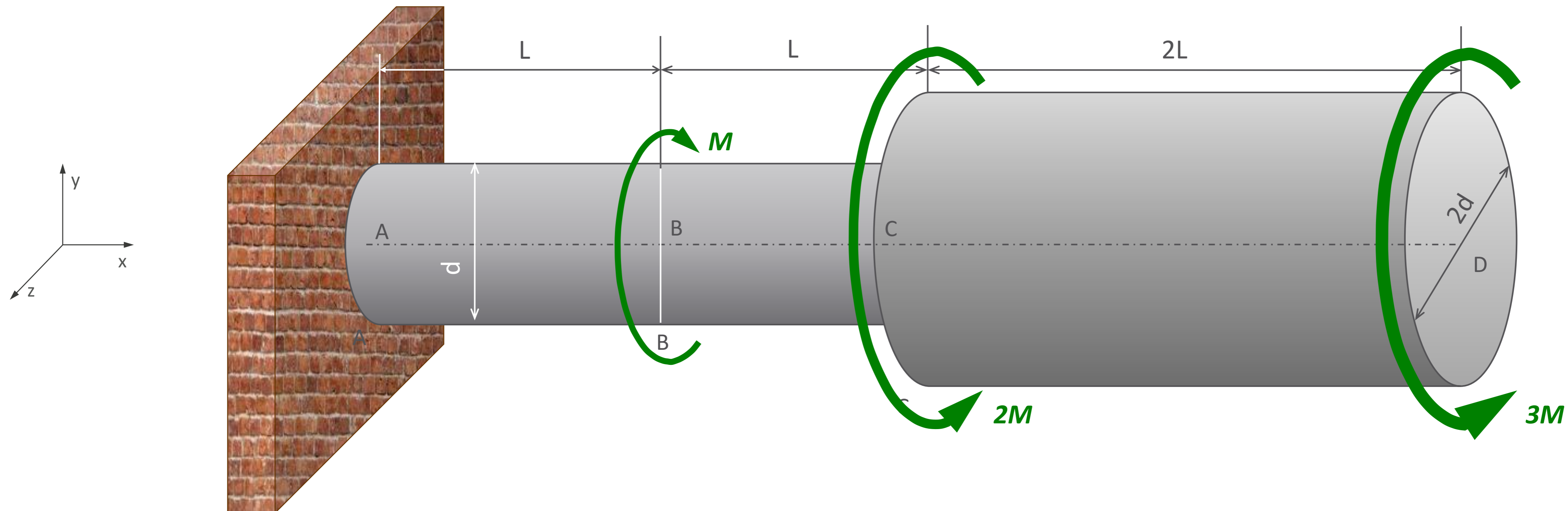
$$\varphi_C = \varphi_I + \varphi_{II} + \dots = 0$$

6. Narysować wykresy momentów skręcających, naprężeń tnących oraz kątów skręceń.

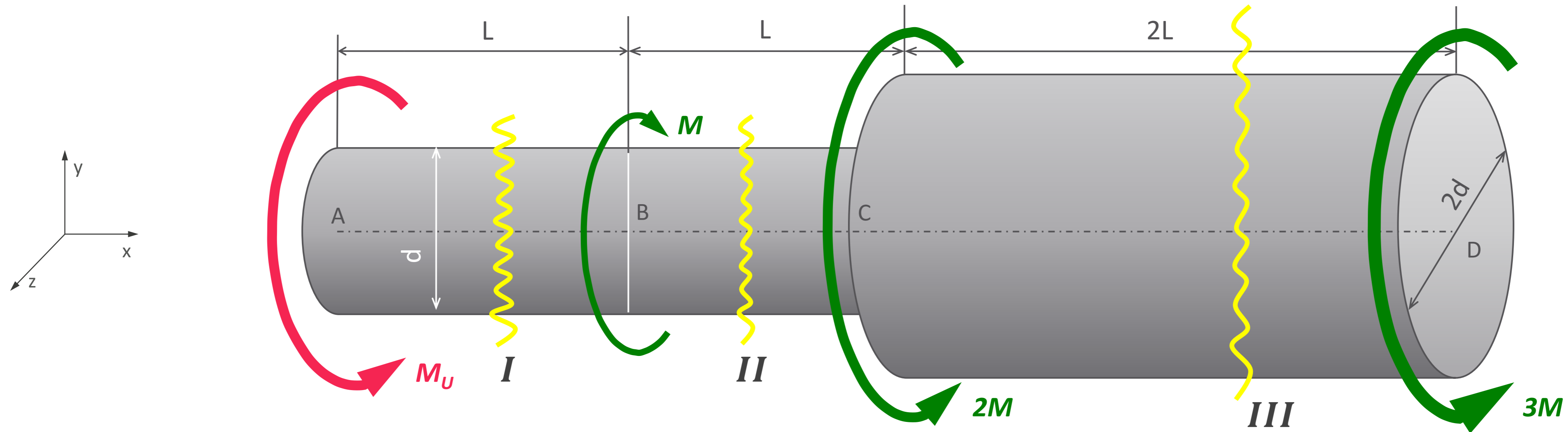
# SKRĘCANIE

## Zadanie

Dla jednostronnie utwierdzonego pręta o zmiennej średnicy, obciążonego momentem skręcającym  $M$ , wyznaczyć i narysować wykresy wewnętrznych momentów skręcających  $M_s$ , naprężeń tnących  $\tau$  oraz kątów skręcenia  $\rho$ . Do obliczeń przyjąć dane:  $M = 5 \frac{kN}{m}$ ,  $d = 0,25m$ ,  $L = 0,25m$ ,  $G = 80 \cdot 10^3 MPa$ .



# SKRĘCANIE



**1N - 1RS = 0 zadanie statycznie wyznaczalne**

1.  $\sum M_{AD} = 0$

3.  $W_0 = \frac{\pi d^3}{16}$

5.  $J_0 = \frac{\pi d^4}{32}$

2.  $\sum M_{I,II,III} = 0$

4.  $\tau = \frac{M}{W_0}$

6.  $\varphi = \frac{Ml}{GJ_0}$

**Równanie geometryczne przemieszczeń**

$$\varphi_C = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} \neq 0$$