
# CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH

# FIGURY PŁASKIE

**Wielkości geometryczne** charakteryzujące przekrój pod względem wytrzymałościowym

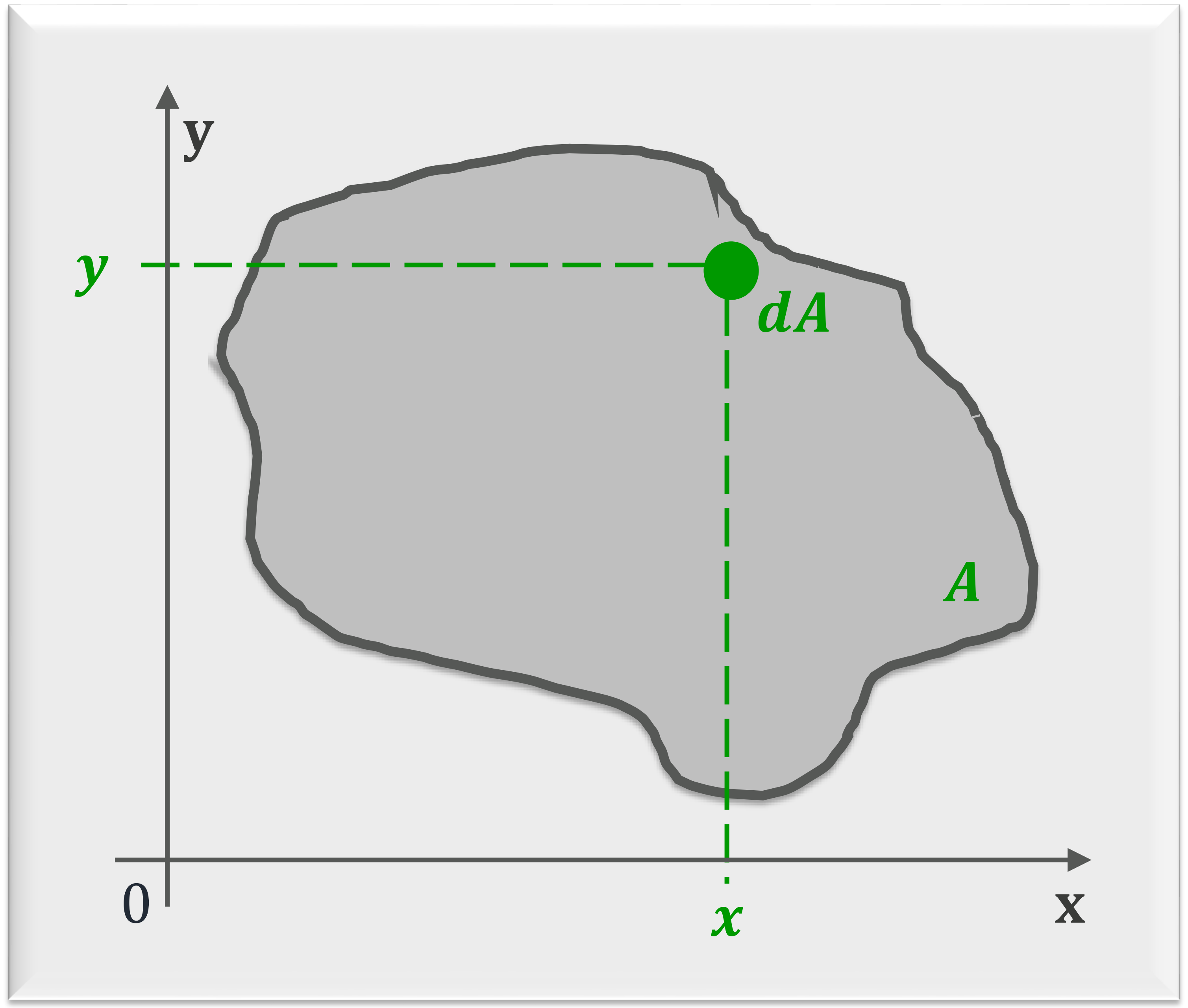
- Pole powierzchni przekroju figury płaskiej ($A$),
- Momenty I stopnia statyczne przekroju ($S$),
- Momenty II stopnia bezwładności przekroju ($I$).

# FIGURY PŁASKIE

- ❑Pole powierzchni przekroju figury płaskiej ($A$)

$$A = \int_S dA = \iint dydz$$

Jest to wielkość zawsze **dodatnia**



# MOMENT PIERWSZEGO STOPNIA

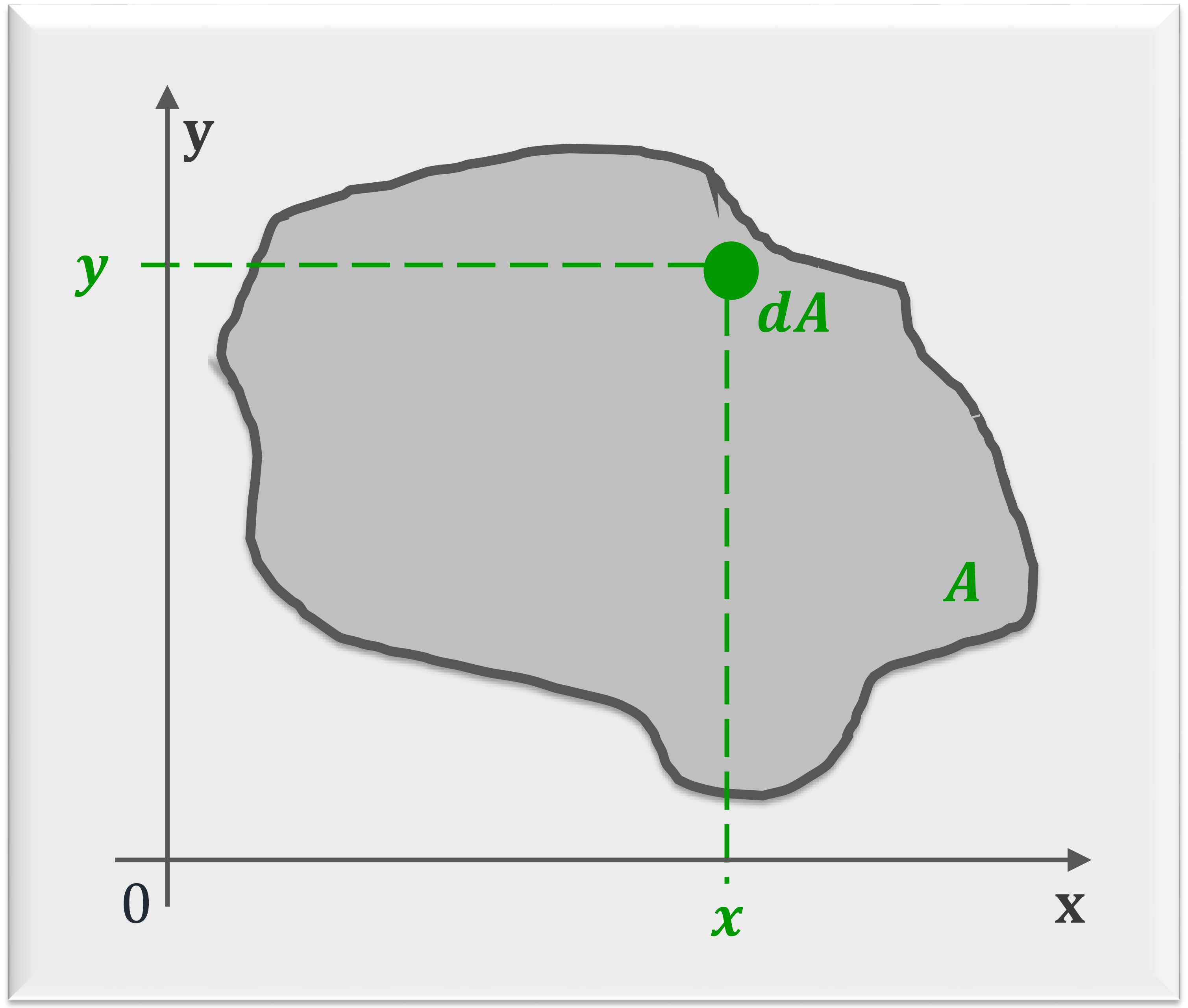
## ❑ Momenty statyczne

Momenty statyczne ($dS$) elementu pola przekroju ($dA$)

- względem osi $x$ $\boldsymbol{dS_x = y \cdot dA}$
- względem osi $y$ $\boldsymbol{dS_y = x \cdot dA}$

Momenty statyczne figury płaskiej o polu $A$ względem osi $x$ oraz $y$

$$S_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_S y dA\,, \qquad S_y \stackrel{\text{def}}{=} \int_S x dA$$




Gdzie $\int_S$ oznacza całkę liczoną po całym polu figury $\boldsymbol{A}$

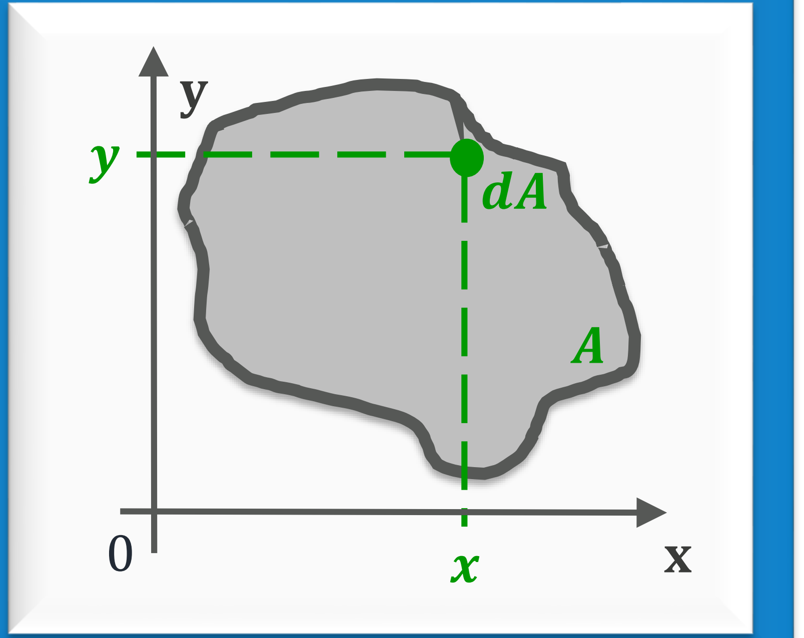
**Momenty statyczne mogą mieć wartość dodatnią, ujemną oraz zerową.**
**Jednostka [..., mm³, cm³, m³,...]**

# MOMENT PIERWSZEGO STOPNIA

## Twierdzenie 1

Moment statyczny $\boldsymbol{S}$ dowolnej figury jest iloczynem pola przekroju $\boldsymbol{A}$ tej figury i współrzędnej środka ciężkości $\boldsymbol{C}$ tej figury, określającej jego odległość od osi, względem której moment statyczny jest liczony.

$$S_x \overset{\text{def}}{=} \int_S y\,dA\,, \qquad S_y \overset{\text{def}}{=} \int_S x\,dA$$

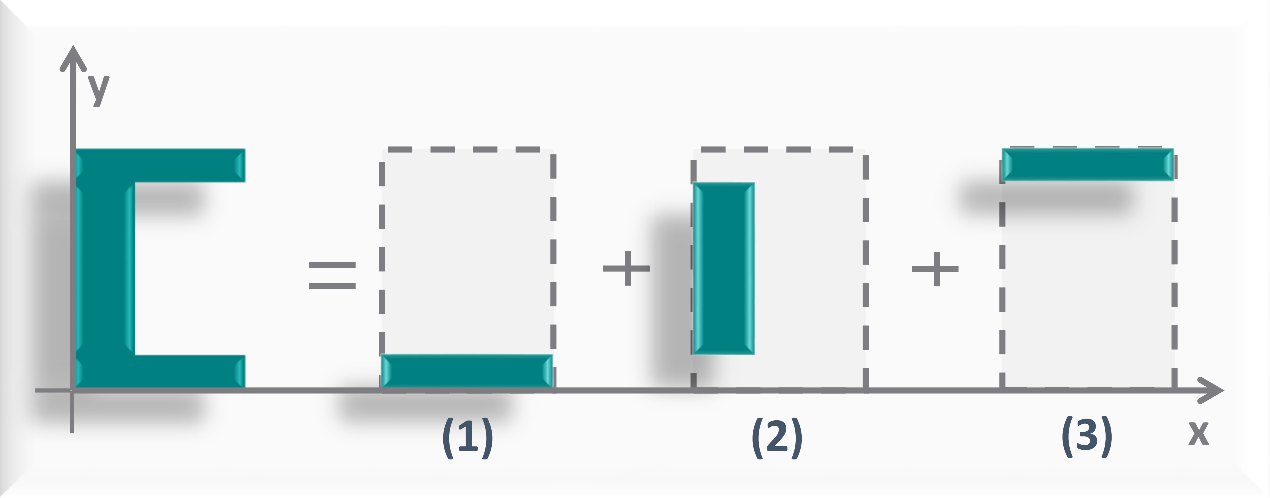



## Twierdzenie 2

Momenty statyczne $\boldsymbol{S}$ liczone względem osi symetrii lub względem prostych przechodzących przez środek symetrii są równe zero.

## Twierdzenie 3

Jeżeli figura o polu $\boldsymbol{A}$ została podzielona w sposób całkowity na $\boldsymbol{n}$ części o polach $\boldsymbol{A_i}$, to moment statyczny $\boldsymbol{S^A}$ całej figury $\boldsymbol{A}$ względem danej osi równy jest sumie momentów statycznych $\boldsymbol{S^{Ai}}$ wszystkich części tej figury liczonych względem tej samej osi.



# ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY

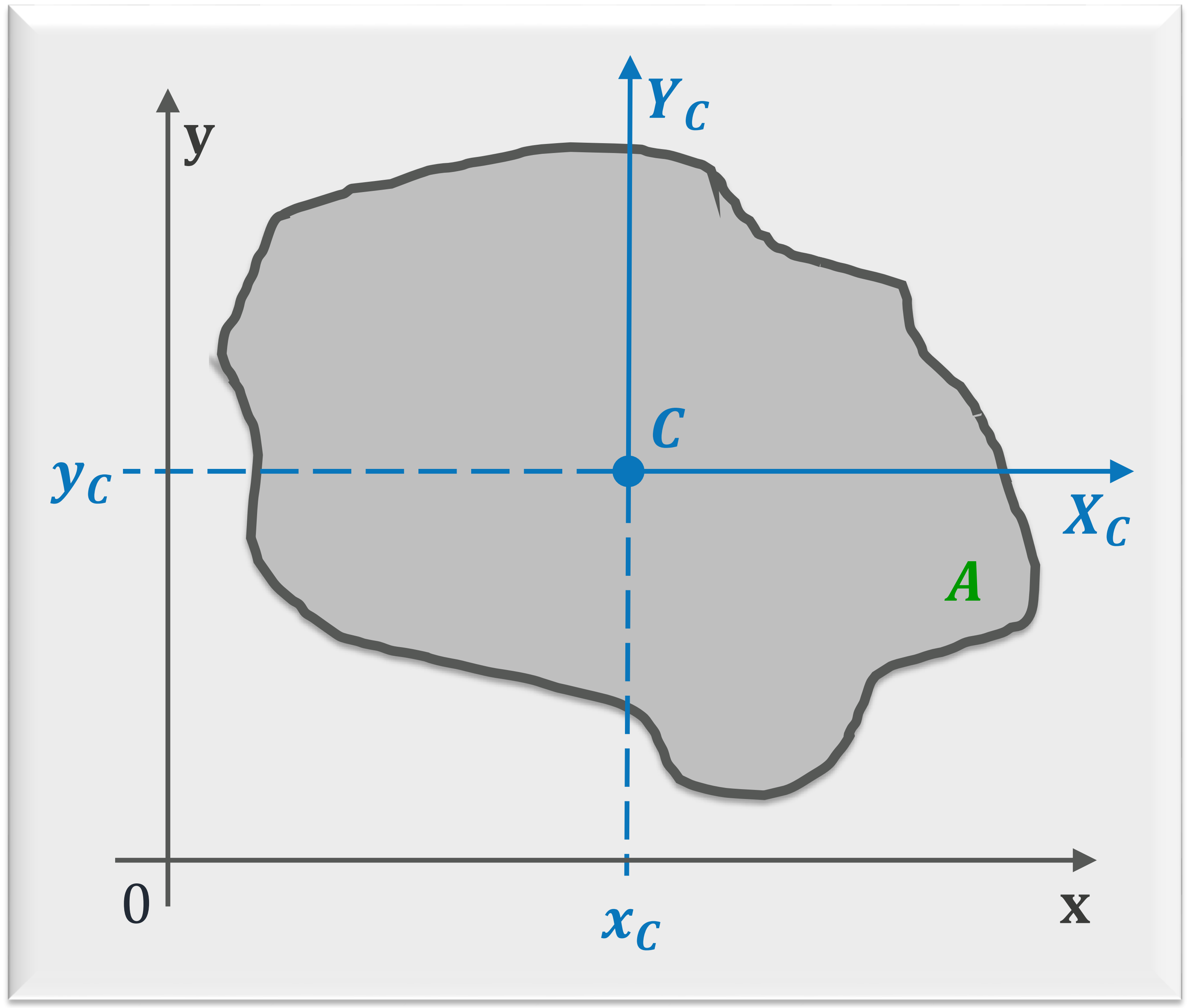
## ❑ Współrzędne środka ciężkości figury płaskiej

$$x_C \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A xdA}{A}, \qquad y_C \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A ydA}{A}$$

Gdzie

$S_x, S_y$ – momenty statyczne figury względem odpowiednich osi $x$ oraz $y$,

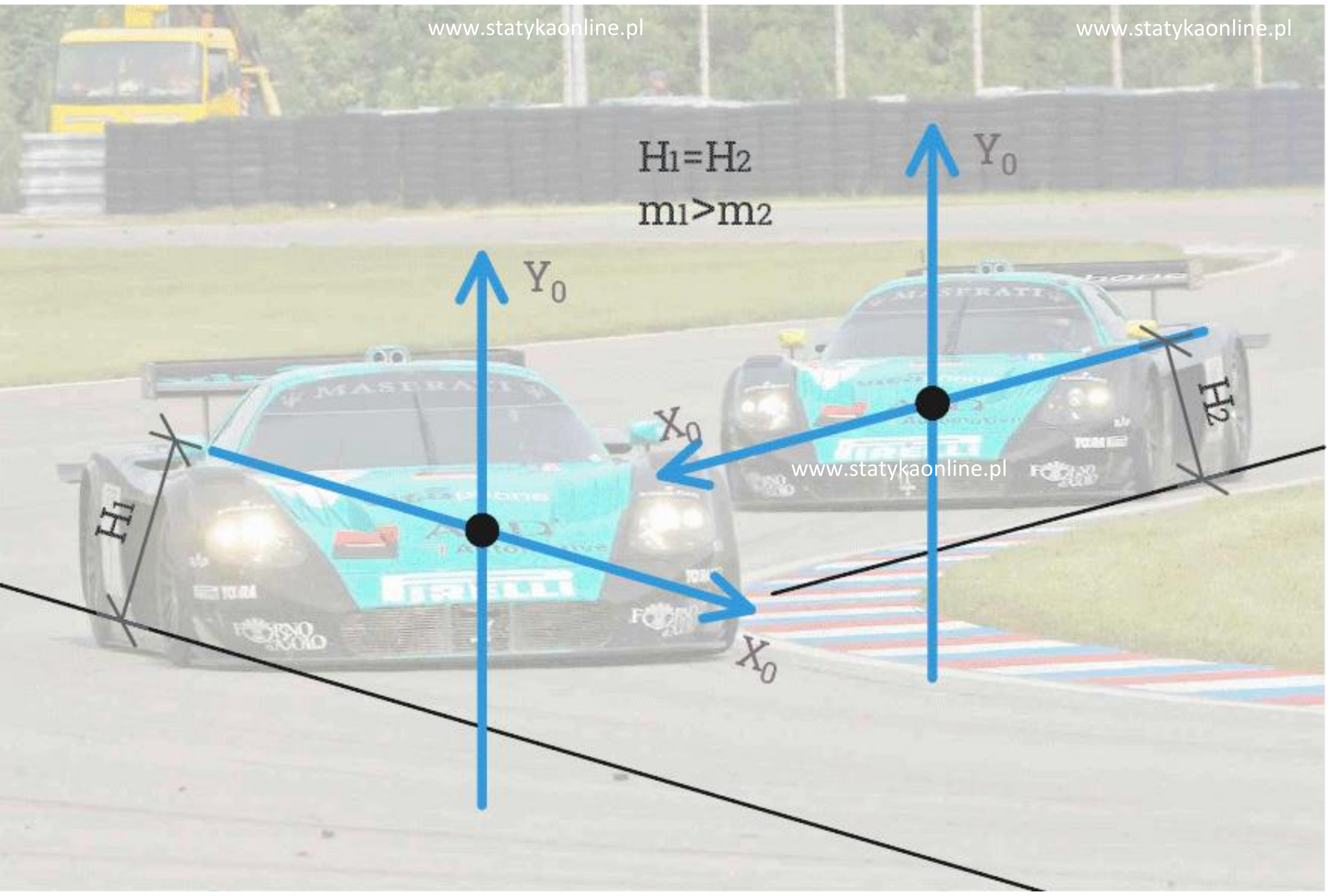
$A$ – pole powierzchni figury

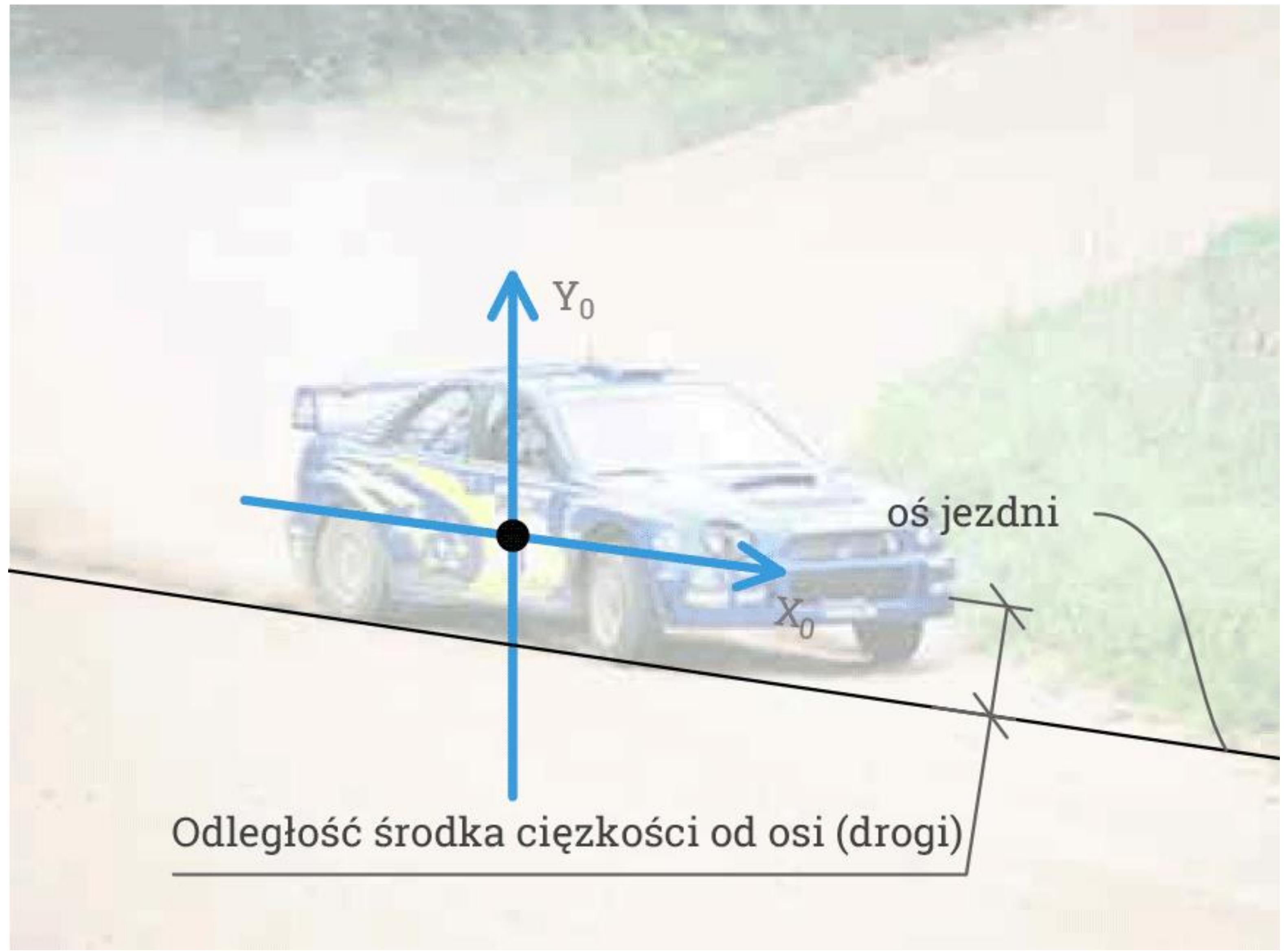


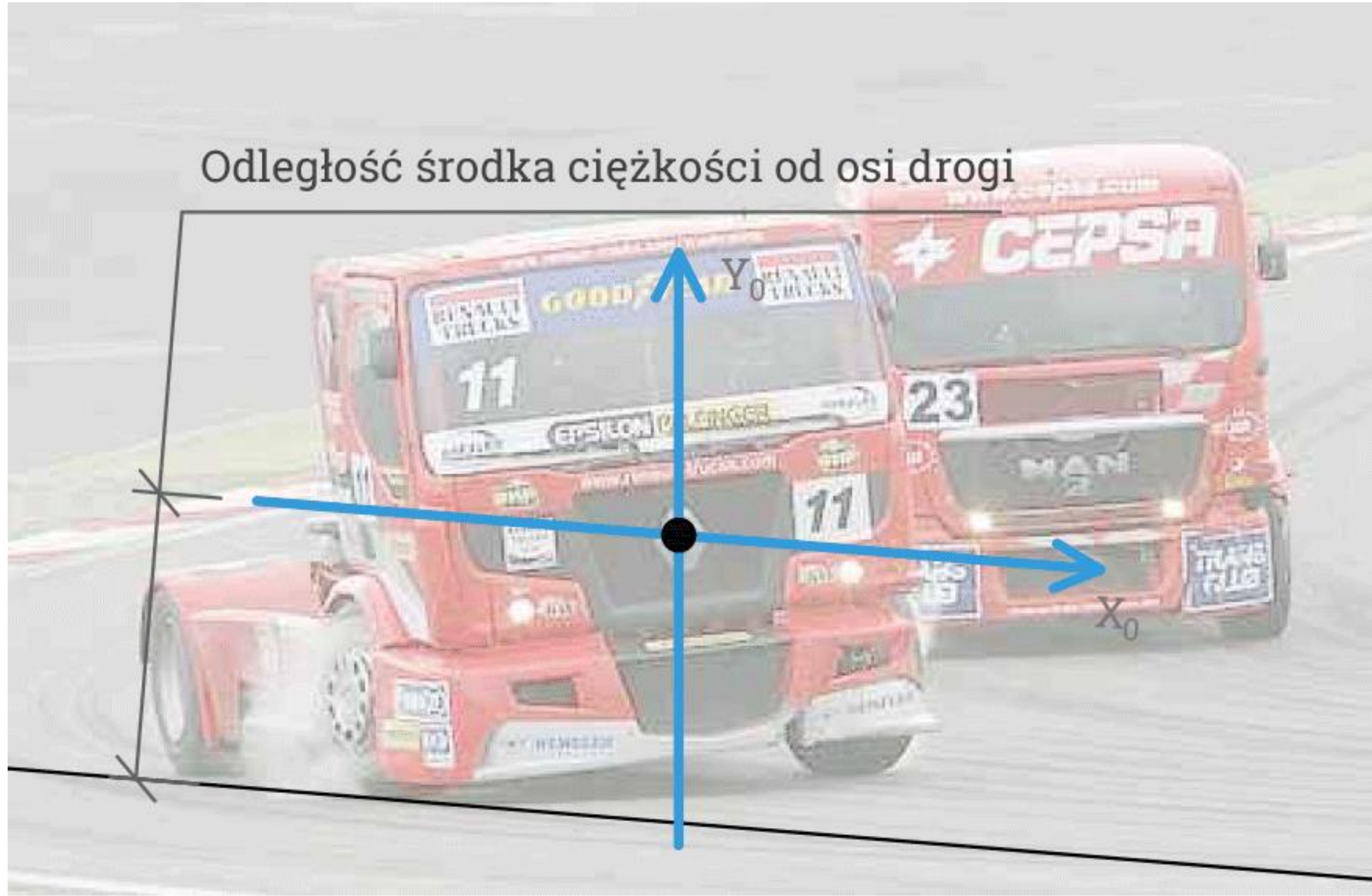

**Osie układu współrzędnych przechodzące przez środek ciężkości figury nazywamy OSIAMI CENTRALNYMI**

# ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY

## ❑ Współrzędne środka ciężkości



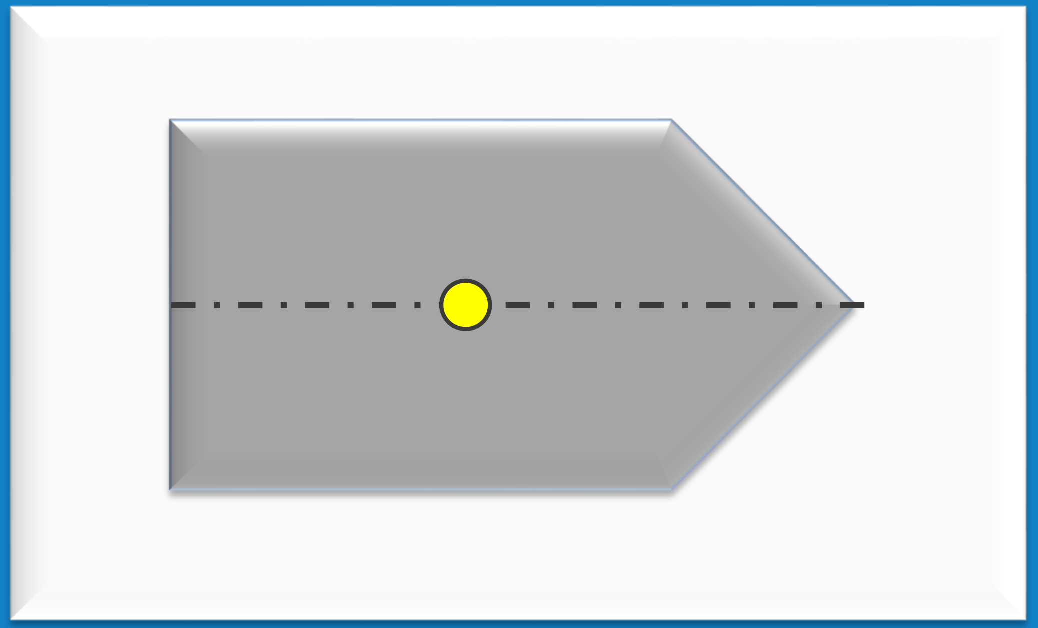



# ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY

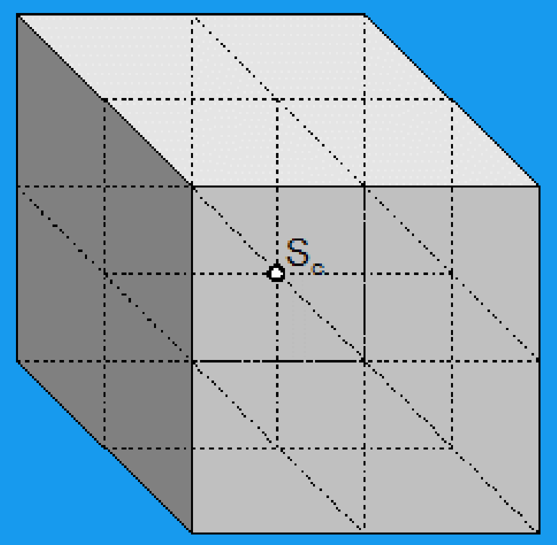
## Twierdzenie 4

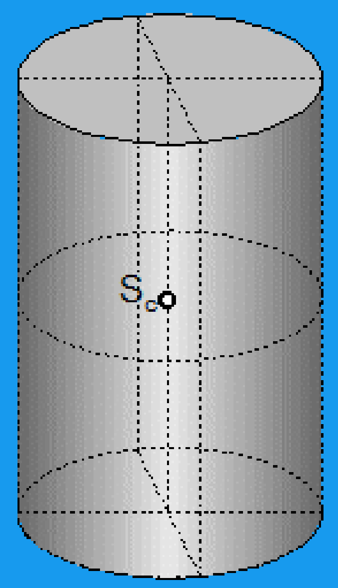
Jeżeli figura ma oś symetrii, to ta oś przechodzi przez środek ciężkości tej figury.



## Twierdzenie 5

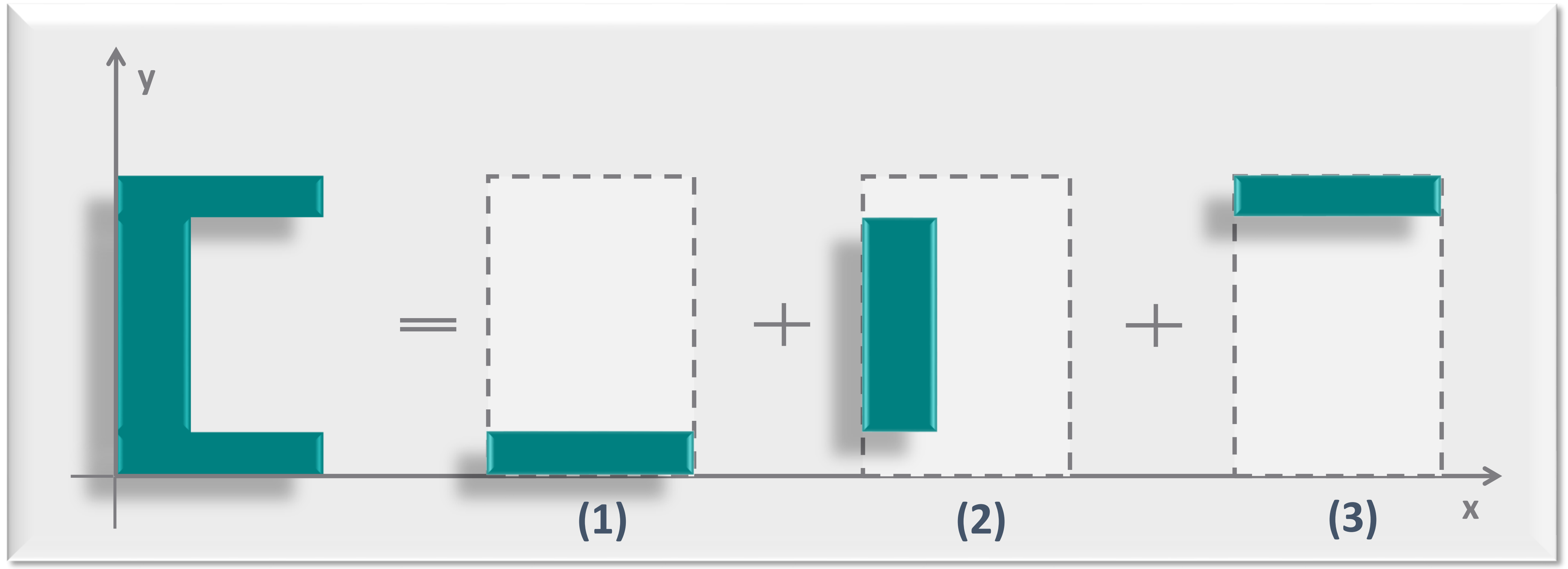
Jeżeli figura ma środek symetrii, to jest on jednocześnie środkiem ciężkości.



# ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY

❑ Sposób wyznaczania środka ciężkości figury złożonej




$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{A}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{A}$$

| i | $x_i$ | $y_i$ | $A_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $a$ | $\frac{1}{2}a$ | $2a^2$ |
| 2 | $\frac{1}{2}a$ | $\frac{7}{2}a$ | $5a^2$ |
| 3 | $a$ | $\frac{1}{2}a$ | $2a^2$ |

$$x_C = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{a \cdot 2a^2 + \frac{1}{2}a \cdot 5a^2 + a \cdot 2a^2}{8a^2} = \frac{\frac{4}{2}a^3 + \frac{7}{2}a^3 + \frac{4}{2}a^3}{8a^2} = \frac{\frac{15}{2}a^3}{8a^2} = \frac{15}{16}a$$

$$y_C = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot 2a^2 + \frac{7}{2}a \cdot 5a^2 + \frac{1}{2}a \cdot 2a^2}{8a^2} = \frac{a^3 + \frac{35}{2}a^3 + a^3}{8a^2} = \frac{\frac{39}{2}a^3}{8a^2} = \frac{39}{16}a$$

# MOMENT DRUGIEGO STOPNIA

## MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

**osiowe**

$I_y, I_z$

**biegunowe**

$I_0$

**odśrodkowe (dewiacji)**

$I_y I_z$

# Geometryczne Momenty Drugiego Stopnia

- Osiowe momenty bezwładności

$$I_x \overset{\text{def}}{=} \int_A y^2\, dA, \qquad I_y \overset{\text{def}}{=} \int_A x^2\, dA$$

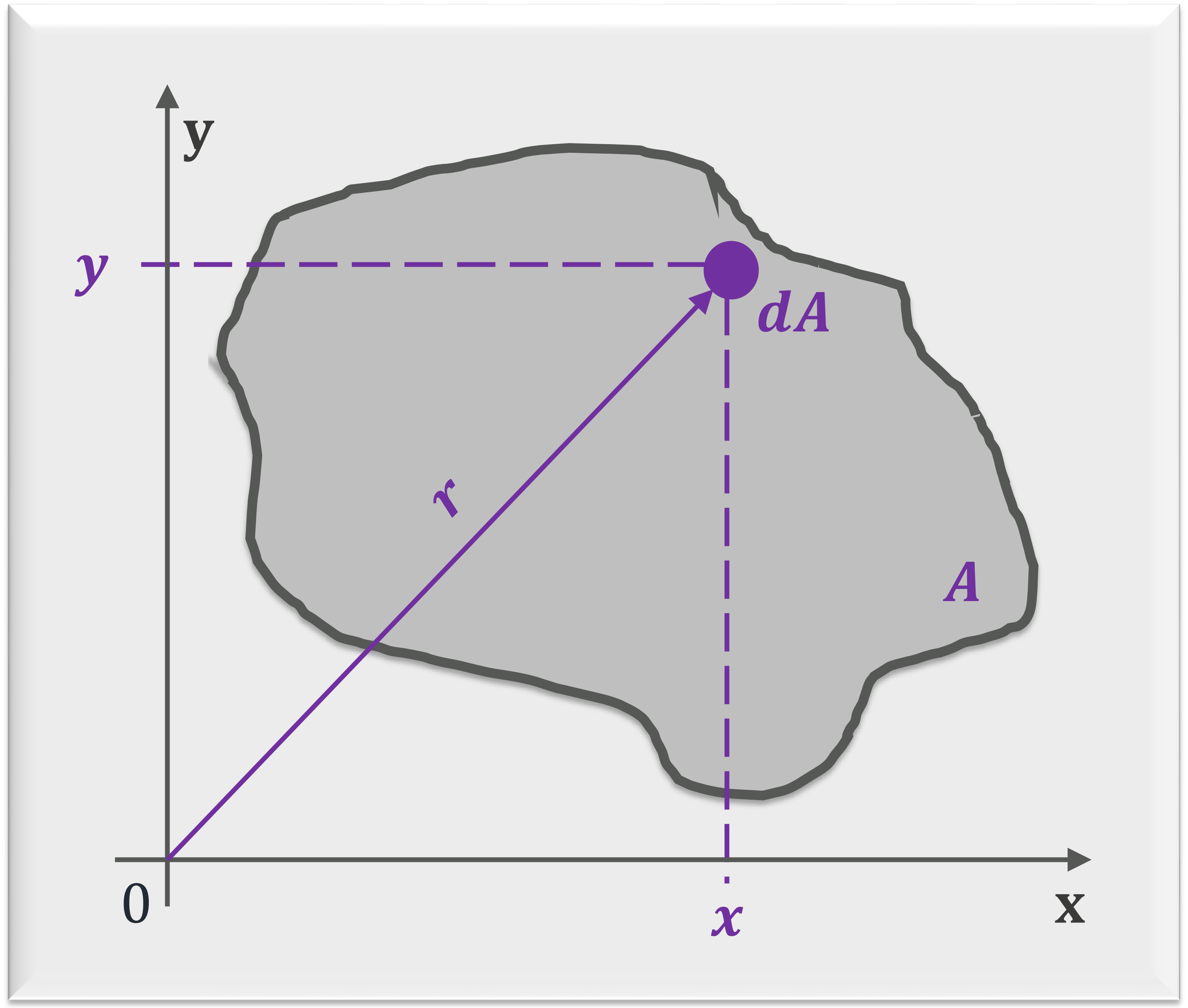
- Biegunowy moment bezwładności

$$I_0 \overset{\text{def}}{=} \int_A r^2\, dA$$

- Odśrodkowy moment bezwładności

$$I_{xy} \overset{\text{def}}{=} \int_A xy\, dA$$

**Jednostka [..., mm$^4$, cm$^4$, m$^4$,...]**




**WAŻNE**

**Momenty osiowe i moment biegunowy** przyjmują tylko wartości dodatnie. **Moment odśrodkowy (dewiacji)** może być dodatni, ujemny lub równy zero.

# MOMENT DRUGIEGO STOPNIA

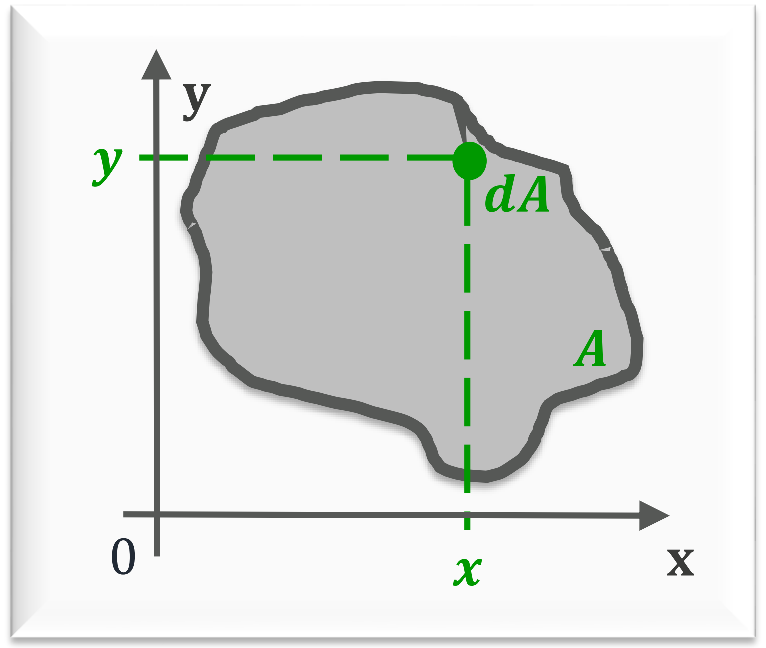
## Twierdzenie 6

Moment bezwładności $I_0$ obliczany względem bieguna układu współrzędnych $xy$ jest równy sumie momentów osiowych $I_x$ oraz $I_y$

$$I_0 = I_x + I_y$$

Dowód

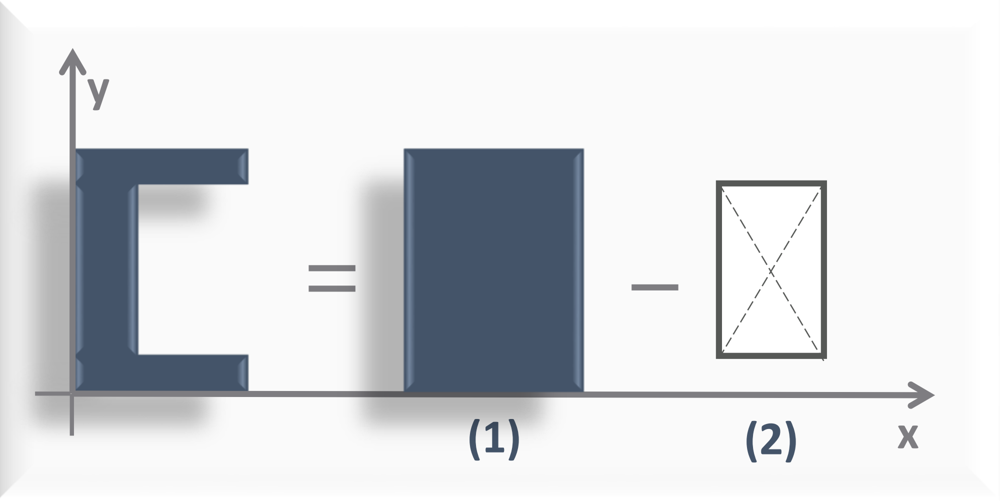
$$I_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = I_x + I_y$$




## Twierdzenie 7

Momenty bezwładności są addytywne (tak, jak momenty statyczne).

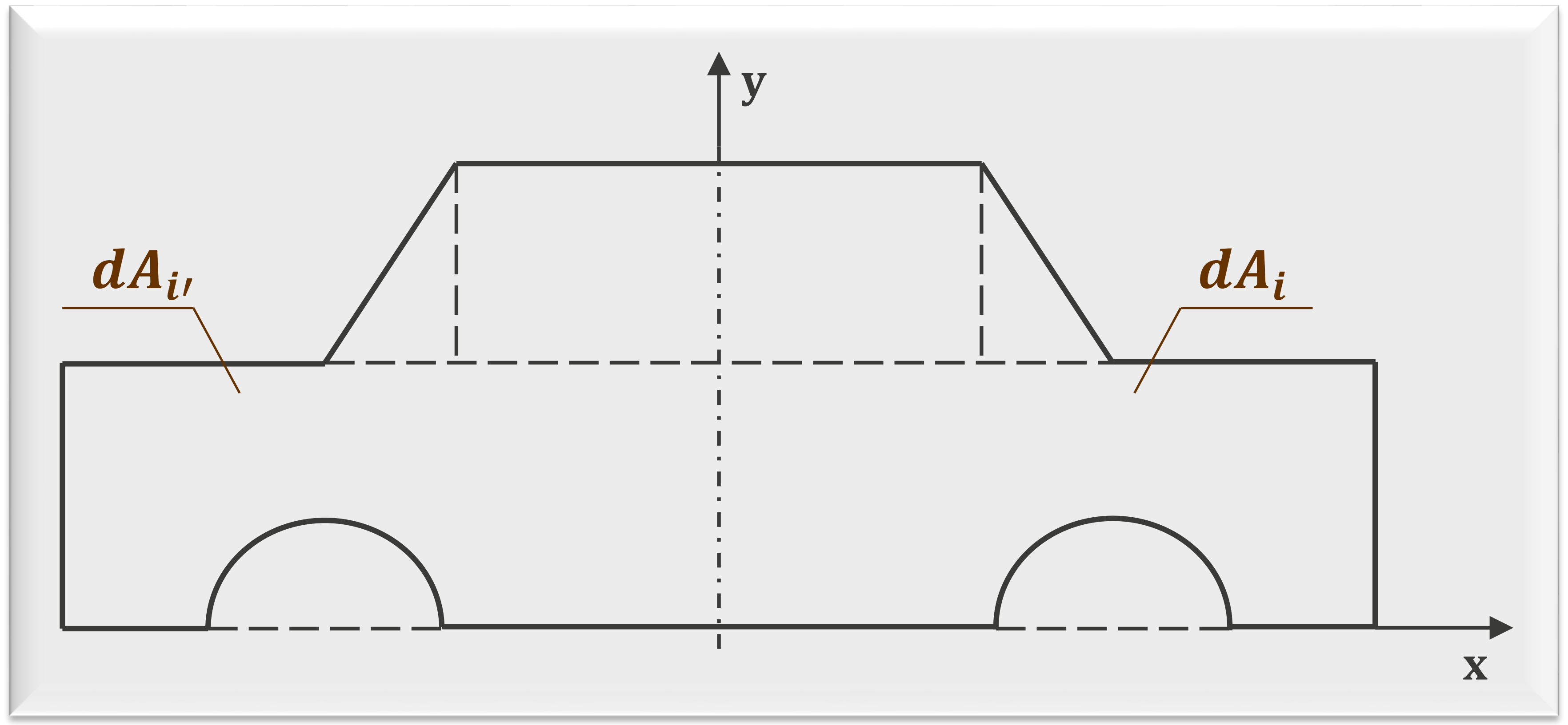
$$I_x^A = \sum_{i=1}^{n} I_x^{Ai} \qquad I_y^A = \sum_{i=1}^{n} I_y^{Ai} \qquad I_0^A = \sum_{i=1}^{n} I_0^{Ai} \qquad I_{xy}^A = \sum_{i=1}^{n} I_{xy}^{Ai}$$



# MOMENT PIERWSZEGO STOPNIA

**Twierdzenie 8**

Jeżeli figura posiada oś symetrii, z którą pokrywa się chociaż jedna z osi układu współrzędnych, to moment odśrodkowy $I_{xy}$ obliczany względem takiego układu jest równy zero.




Dla każdego wycinka pola powierzchni $dA_i$ istnieje taki symetryczny wycinek $dA_{i'} = dA_i$, że

$$x \cdot y \cdot dA_i = -x \cdot y \cdot dA_{i'}$$

stąd

$$\int_{A(x>0)} x \cdot y \cdot dA = -\int_{A(x<0)} x \cdot y \cdot dA$$

więc

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

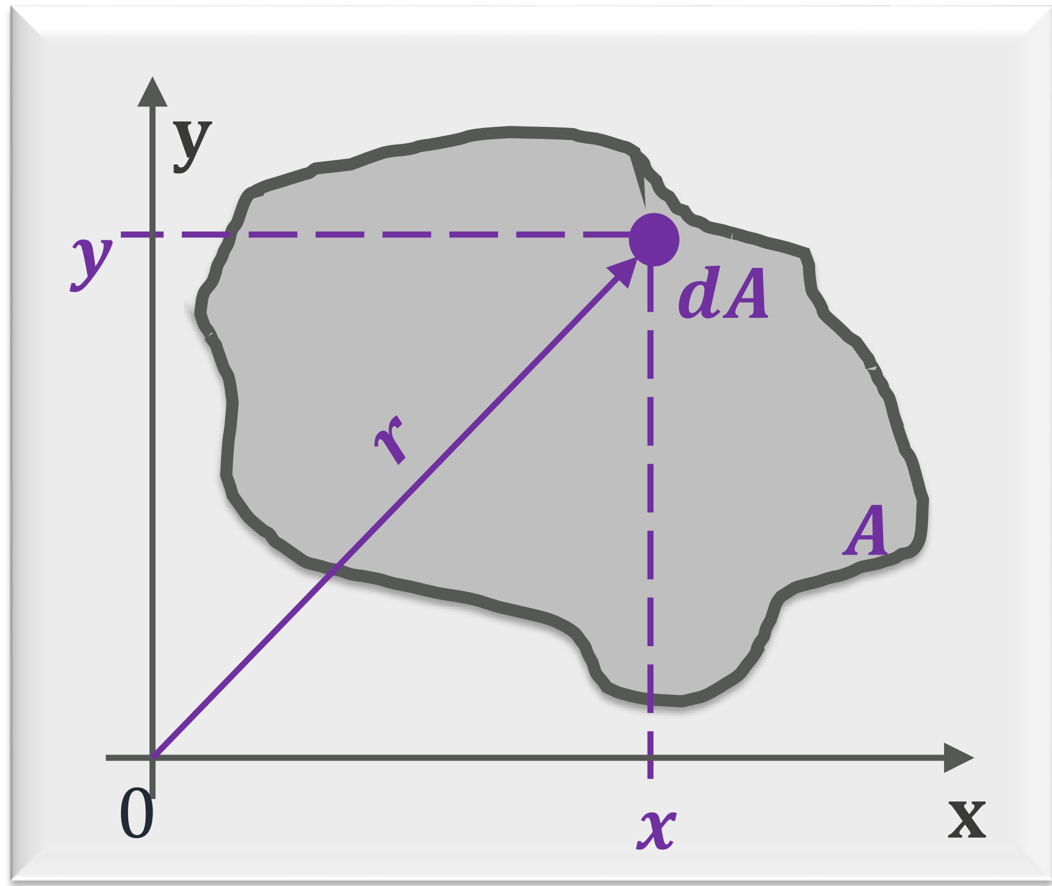
# PROMIEŃ BEZWŁADNOŚCI

**Definicja**

**Promień bezwładności** to odległość $r$ od osi punktu, w którym należy skupić masę całego ciała, aby moment bezwładności tego punktu materialnego był równy rzeczywistemu momentowi danej bryły względem tej osi.

$$i_x \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad i_y \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad i_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{I_0}{A}}$$

$$I_x = {i_x}^2 \cdot A \ * \qquad I_y = {i_y}^2 \cdot A \ * \qquad I_0 = {i_0}^2 \cdot A \ *$$




**Twierdzenie 9**

Pomiędzy promieniami bezwładności $i_x i_y$ względem osi układu współrzędnych $xy$ a promieniem bezwładności $i_0$ względem bieguna tego układu zachodzi zależność

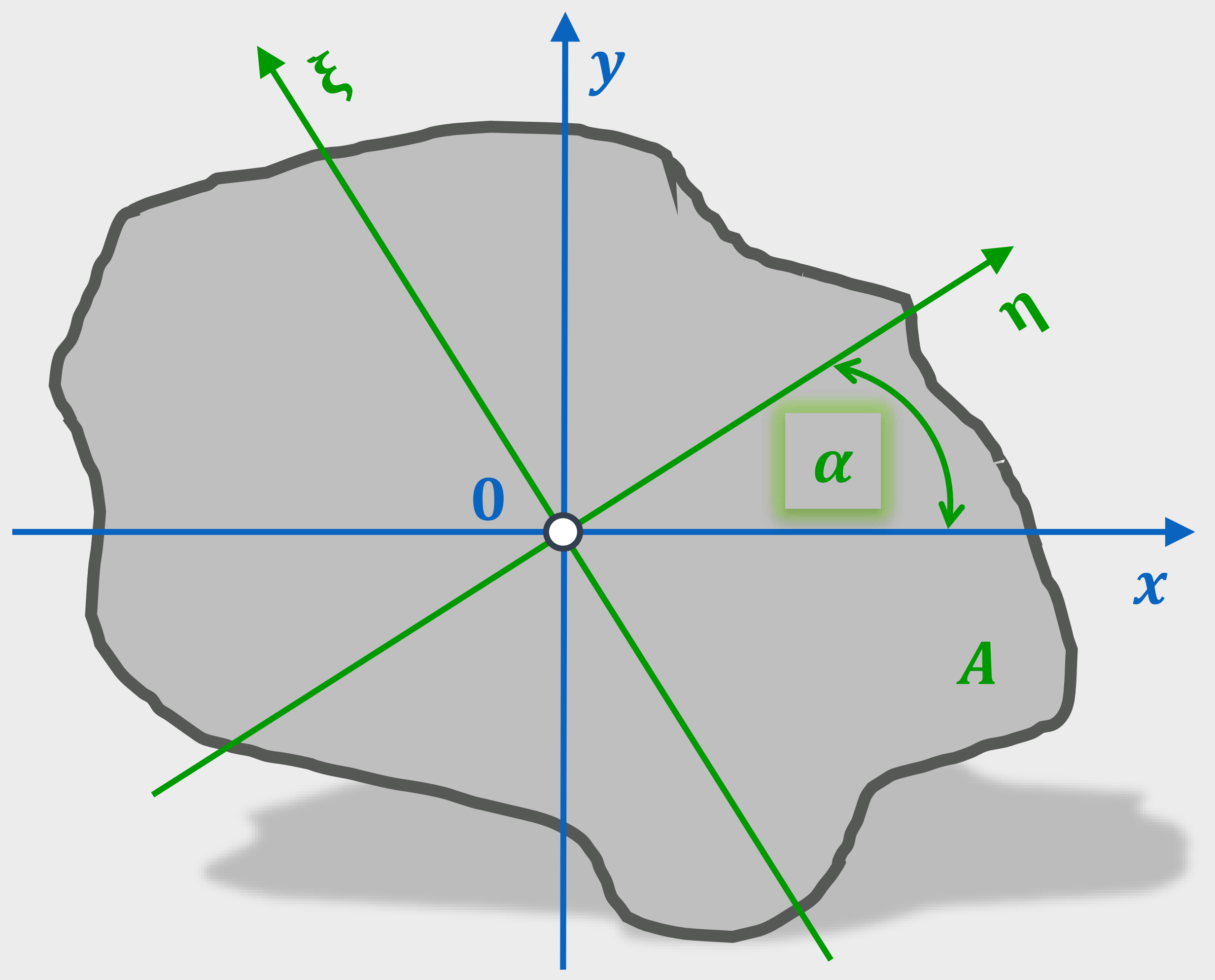
$$i_0^2 = i_x^2 + i_y^2$$

**DOWÓD**

$$I_0 = I_x + I_y \qquad \text{po podstawieniu } *$$

$${i_0}^2 \cdot A = {i_x}^2 \cdot A + {i_y}^2 \cdot A \Rightarrow i_0^2 = i_x^2 + i_y^2$$

# Centralne główne momenty bezwładności




Suma momentów bezwładności względem osi układów współrzędnych o wspólnym biegunie jest stała, mimo zmiany wartości poszczególnych momentów osiowych wraz z obrotem układu współrzędnych względem bieguna

$$I_x + I_y = I_0 = I_\xi + I_\eta$$

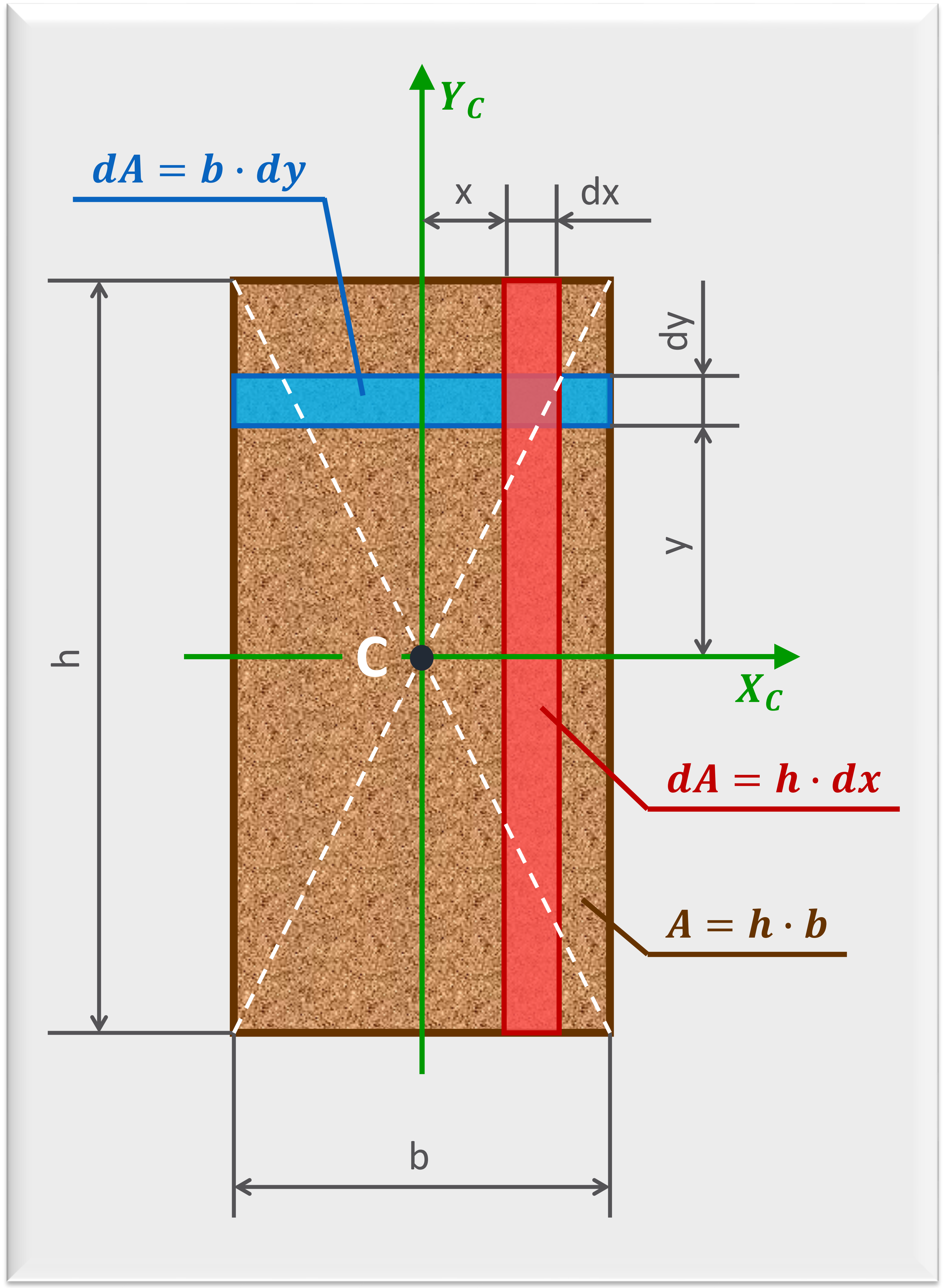
Musi istnieć taki kąt $\alpha$ , dla którego momenty osiowe będą przyjmować wartości ekstremalne.

**Główne osie bezwładności** – układ współrzędnych, względem którego moment odśrodkowy (dewiacyjny jest równy zero, $I_{xy} = 0$. Momenty liczone względem osi głównych nazywa się **głównymi momentami bezwładności**.

**Główne centralne osie bezwładności** – to osie główne przechodzące przez środek ciężkości figury, a obliczone względem nich momenty to **główne centralne momenty bezwładności**.

# Centralne główne momenty bezwładności

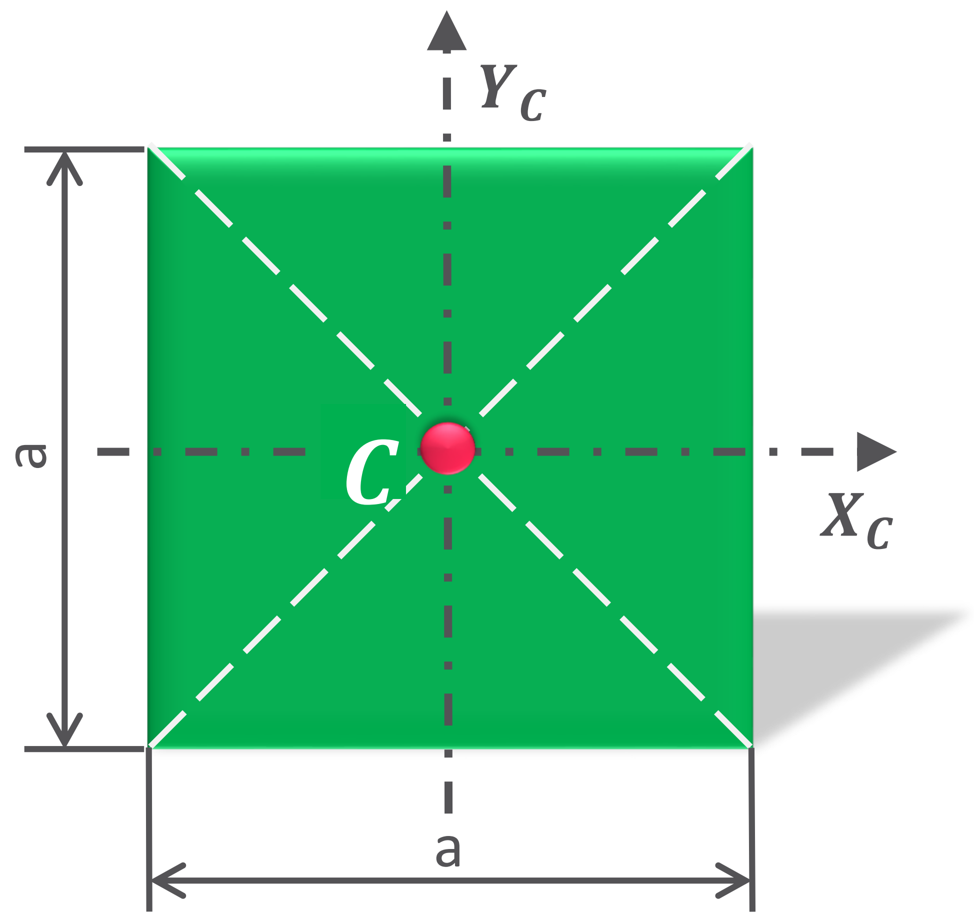
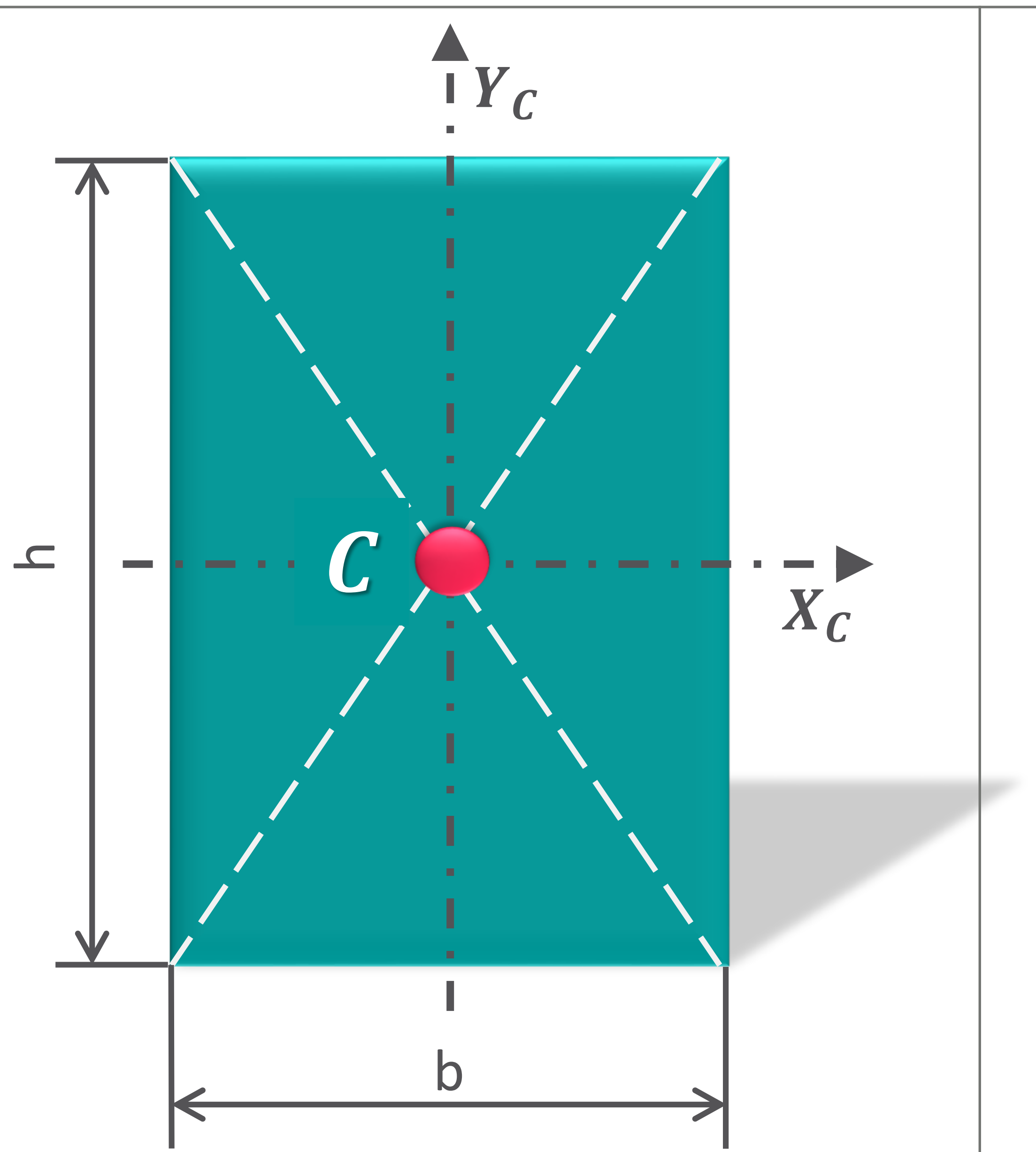
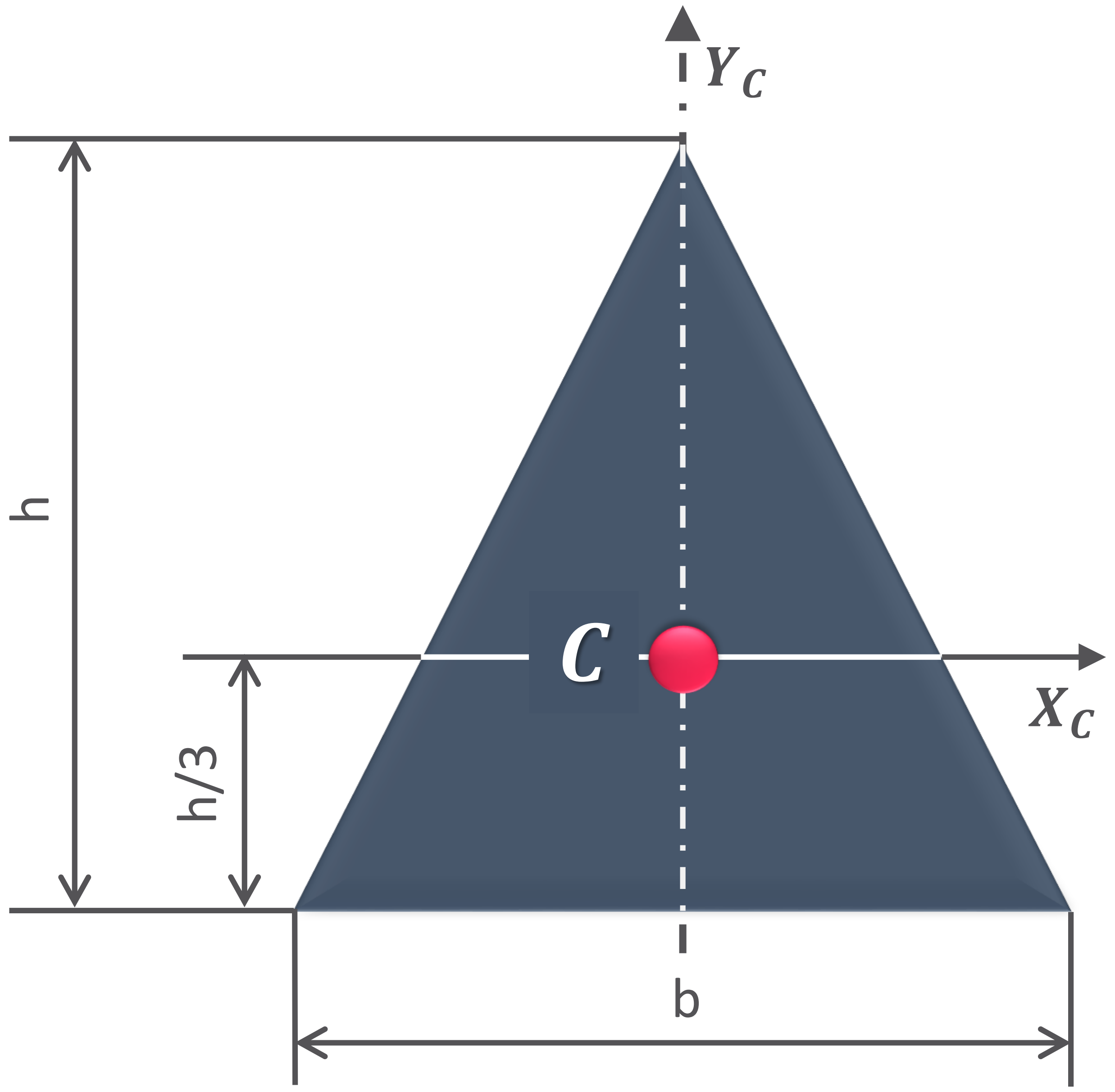
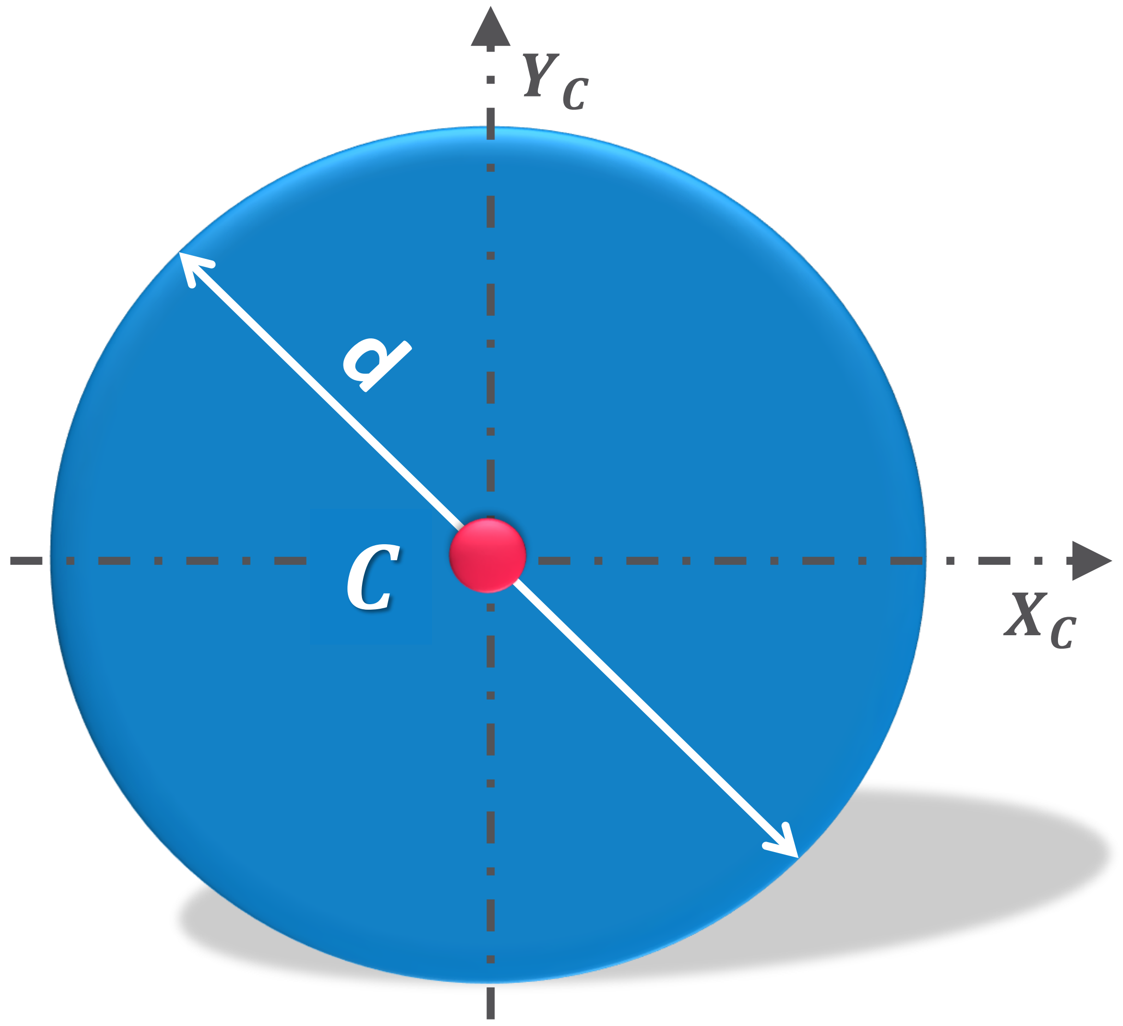
Obliczyć główne centralne momenty bezwładności dla prostokąta o wysokości *h* oraz szerokości *b*.




$$I_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_A y^2\, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \left[\frac{y^3}{3} \cdot b\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

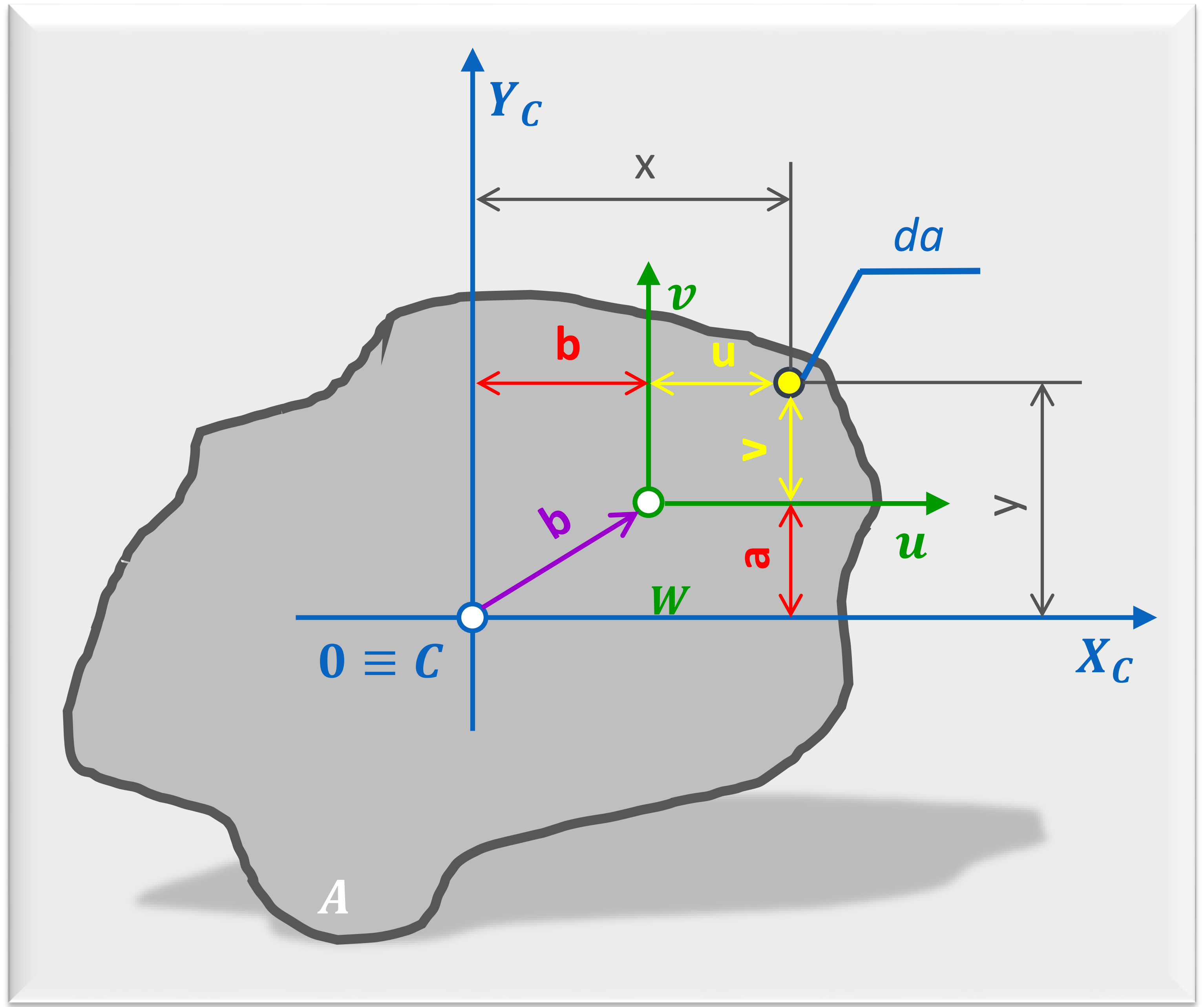
$$I_y \stackrel{\text{def}}{=} \int_A x^2\, dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot h \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot h\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{h^3 \cdot b}{12}$$

# Centralne główne momenty bezwładności

| | | | |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |
| $I_{xC} = I_{yC} = \frac{a^4}{12}$ | $I_{xC} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ <br> $I_{yC} = \frac{h^3 \cdot b}{12}$ | $I_{xC} = \frac{b \cdot h^3}{36}$ <br> $I_{yC} = \frac{h^3 \cdot b}{36}$ | $I_{xC} = I_{yC} = \frac{\pi d^4}{64}$ |

# TWIERDZENIE STEINERA

Dana jest figura. Układ współrzędnych ***xy*** przyłożony jest w środku ciężkości pola ***A*** tej figury. Znane są wymiary ***a, b, r,*** momenty bezwładności $I_x, I_y, I_C, I_{xy}$. Należy znaleźć momenty bezwładności figury $I_u, I_v, I_W, I_{uv}$.




$$I_u \stackrel{\text{def}}{=} \int_A v^2 \cdot dA = \int_A (y+a)^2 \cdot dA = \underbrace{\int_A y^2 \cdot dA}_{I_{xC}} + 2a \underbrace{\int_A y \cdot dA}_{S_{xC}=0} + a^2 \underbrace{\int_A dA}_{A}$$

$X_C$ oś centralna

Stąd

$$I_u = I_{xC} + a^2 \cdot A$$

$$I_v = I_{yC} + b^2 \cdot A$$

$$I_W = I_0 + r^2 \cdot A$$

$$I_{uv} = I_{xy} + a \cdot b \cdot A$$

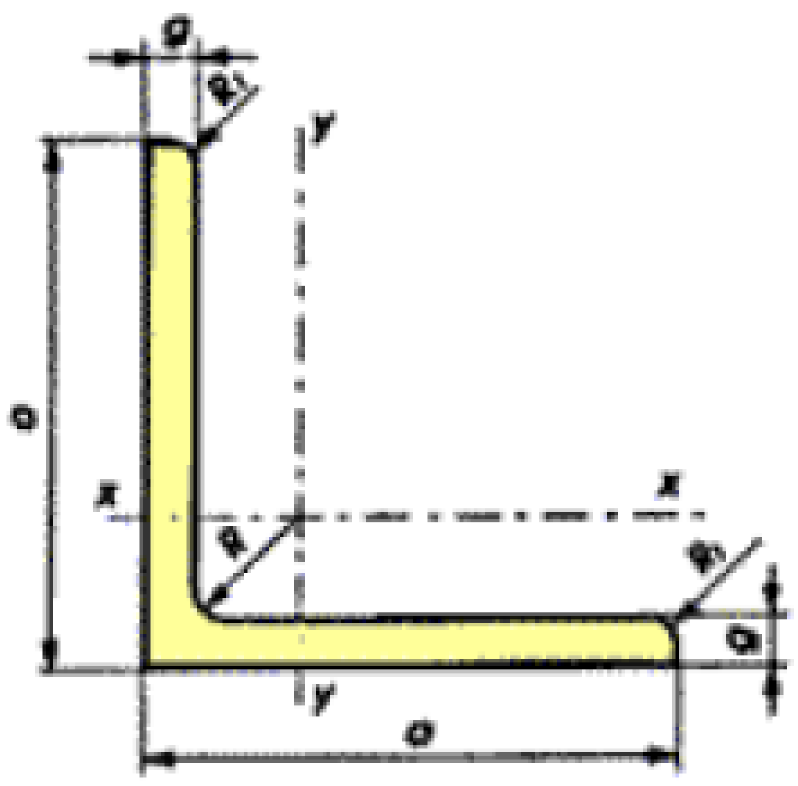
$$I_W = I_u + I_v = \underbrace{I_{xC} + I_{yC}}_{I_0} + \underbrace{(a^2 + b^2)}_{r^2} A$$

Definicja

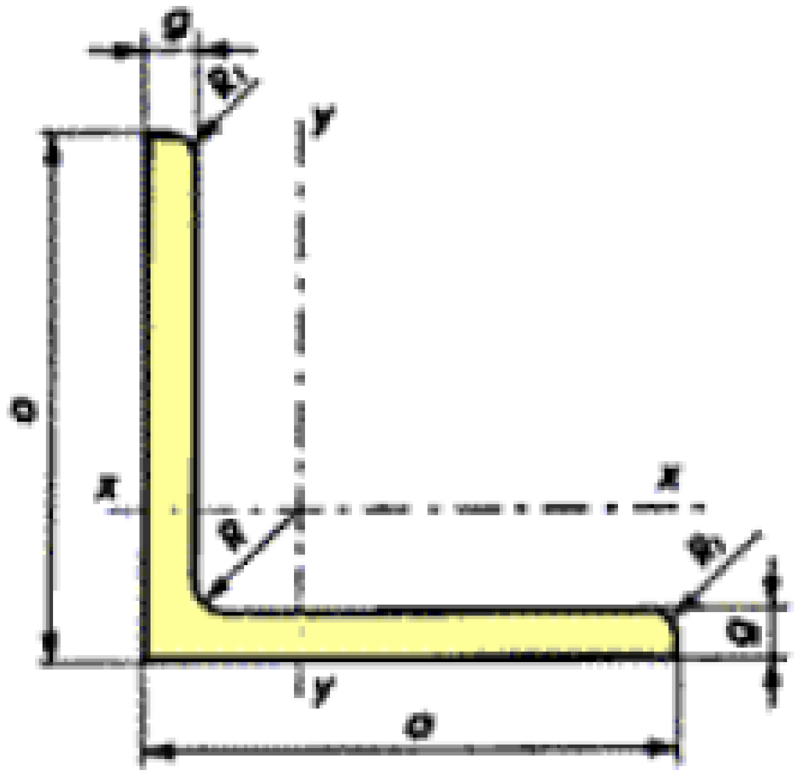
**Moment bezwładności figury** względem dowolnej prostej jest równy momentowi bezwładności tej figury względem osi centralnej do prostej, powiększonemu o iloczyn pola tej figury i kwadratu odległości między osiami.

# TABELA WYROBÓW HUTNICZYCH

| Kątowniki równoramienne 20x20 ÷ 300x300 | |
|---|---|
| **Długość** | Standardowe 12,1 mb ,możliwe do wykonania L=6,1mb- L=24,1mb |
| **Produkcja zgodnie z normami** | PN-EN 10056-2 |
| **Pakowanie** | Wiązki o masie 2,5÷ 5,0 Mg |
| **Wymiar, gatunek, powierzchnia, atest i tolerancja wg norm** | EN 10056-1<br>EN 10025-2<br>EN 10056-2<br>EN 10204<br>EN 10056-2 |
| **Gatunki stali** | S235JR+M, S235JR+AR, S355J2, S355J0, S235J2, S275JR, S275J0, S275J2, S275M, S355JR, S355J0, S355J2, S355K2, S355M, S35ML, S460M, S460ML, C10, C35, C45, C60, E295, E335, E360 |



# TABELA WYROBÓW HUTNICZYCH



## Przykład

| Kątowniki równoramienne 20x20 ÷ 300x300 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| wyróżnik oznaczenia | g | r | A | G | U | $I_x = I_y$ | $W_x = W_y$ | $i_x = i_y$ | $e_x = e_y$ |
| | mm | | $cm^2$ | kg/m | $m^2/m$ | $cm^4$ | $cm^3$ | cm | |
| **kątownik 45x45x4** | 4 | 7 | 3,49 | 2,74 | 0,174 | 6,43 | 1,97 | 1,36 | 1,23 |
| **kątownik 50x50x4** | 4 | 7 | 3,89 | 3,06 | 0,194 | 8,97 | 2,46 | 1,52 | 1,36 |

**A** - przekrój poprzeczny w $cm^2$, **G** - masa 1m w kg, **U** - powierzchnia boczna w $m^2/m$

$\mathbf{I_x}$ - moment bezwładności względem osi w $cm^4$, $\mathbf{W_x}$ - wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu w $cm^3$,

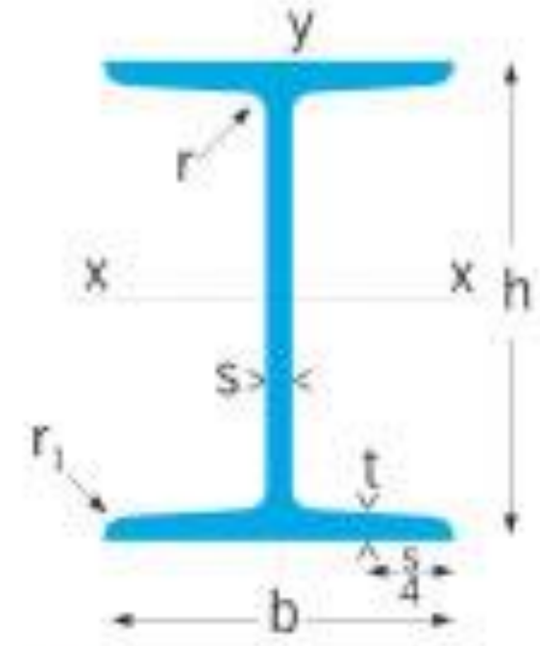
$\mathbf{i_x} = \sqrt{\mathbf{I_x}/\mathbf{A}}$ - promień bezwładności w cm

$\mathbf{I_y}$ - moment bezwładności względem osi w $cm^4$, $\mathbf{W_y}$ - wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu w $cm^3$

$\mathbf{i_y} = \sqrt{\mathbf{I_y}/\mathbf{A}}$ - promień bezwładności w cm

*Źródło: konsorcjumstali.com.pl*

# TABELA WYROBÓW HUTNICZYCH




Serwis

- Cięcie piłą
- Śrutowanie
- Malowanie antykorozyjne
- Frezowanie

## Dwuteowniki zwykłe INP wg EN 10024

| Oznaczenie | Wyróżnik h | b | s | t | r | $r_1$ | Pow. przekroju | Masa teoretyczna | Wielkości statyczne Ix | Iy | Wx | Wy |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | mm | | | | | | $cm^2$ | kg/m | $cm^4$ | | $cm^3$ | |
| INP 80 | 80 | 42 | 3,9 | 5,9 | 3,9 | 2,3 | 7,57 | 5,94 | 77,8 | 6,29 | 19,5 | 3,00 |
| INP 100 | 100 | 50 | 4,5 | 6,8 | 4,5 | 2,7 | 10,60 | 8,34 | 171,0 | 12,20 | 34,2 | 4,88 |
| INP 120 | 120 | 58 | 5,1 | 7,7 | 5,1 | 3,1 | 14,20 | 11,1 | 328,0 | 21,50 | 54,7 | 7,41 |
| INP 140 | 140 | 66 | 5,7 | 8,6 | 5,7 | 3,4 | 18,20 | 14,3 | 573,0 | 35,20 | 81,9 | 10,70 |
| INP 160 | 160 | 74 | 6,3 | 9,5 | 6,3 | 3,8 | 22,80 | 17,9 | 935,0 | 54,70 | 117,0 | 14,30 |
| INP 180 | 180 | 82 | 6,9 | 10,4 | 6,9 | 4,1 | 27,90 | 21,9 | 1450,0 | 81,30 | 161,0 | 19,80 |
| INP 200 | 200 | 90 | 7,5 | 11,3 | 7,5 | 4,5 | 33,40 | 26,2 | 2140,0 | 117,0 | 214,0 | 26,00 |
| INP 220 | 220 | 98 | 8,1 | 12,2 | 8,1 | 4,9 | 39,50 | 31,1 | 3060,0 | 162,0 | 278,0 | 33,10 |
| INP 240 | 240 | 106 | 8,7 | 13,1 | 8,7 | 5,2 | 46,10 | 36,2 | 4250,0 | 221,0 | 354,0 | 41,70 |
| INP 260 | 260 | 113 | 9,4 | 14,1 | 9,4 | 5,6 | 53,30 | 41,9 | 5740,0 | 288,0 | 442,0 | 51,00 |
| INP 300 | 300 | 125 | 10,8 | 16,2 | 10,8 | 6,5 | 69,00 | 54,2 | 9800,0 | 451,0 | 653,0 | 72,20 |
| INP 340 | 340 | 137 | 12,2 | 18,3 | 12,2 | 7,3 | 86,70 | 68,0 | 15700,0 | 674,0 | 923,0 | 98,40 |
| INP 360 | 360 | 143 | 13,0 | 19,5 | 13,0 | 7,8 | 97,00 | 76,1 | 19610,0 | 818,0 | 1090,0 | 114,00 |
| INP 400 | 400 | 155 | 14,4 | 21,6 | 14,4 | 8,6 | 118,00 | 92,4 | 29210,0 | 1160,0 | 1460,0 | 149,00 |
| INP450 | 450 | 170 | 16,2 | 24,3 | 16,2 | 9,7 | 147,00 | 115,0 | 45850,0 | 1730,0 | 2040,0 | 203,00 |
| INP 500 | 500 | 185 | 18,0 | 27,0 | 18,0 | 10,8 | 179,00 | 141,0 | 68740,0 | 2480,0 | 2750,0 | 268,00 |
| INP 550 | 550 | 200 | 19,0 | 30,0 | 19,0 | 11,9 | 212,00 | 166,0 | 99180,0 | 3490,0 | 3610,0 | 349,00 |

http://eurostal-poludnie.bochnia.pl

Bezwładność, inercja - zdolność ciała materialnego do zachowania swego stanu ruchu, gdy działające na nie siły zewnętrzne równoważą się. Miarą bezwładności ciała w ruchu prostoliniowym jest jego masa.


Bezwładność, inercja - zdolność ciała materialnego do zachowania swego stanu ruchu, gdy działające na nie siły zewnętrzne równoważą się. Miarą bezwładności ciała w ruchu prostoliniowym jest jego masa.