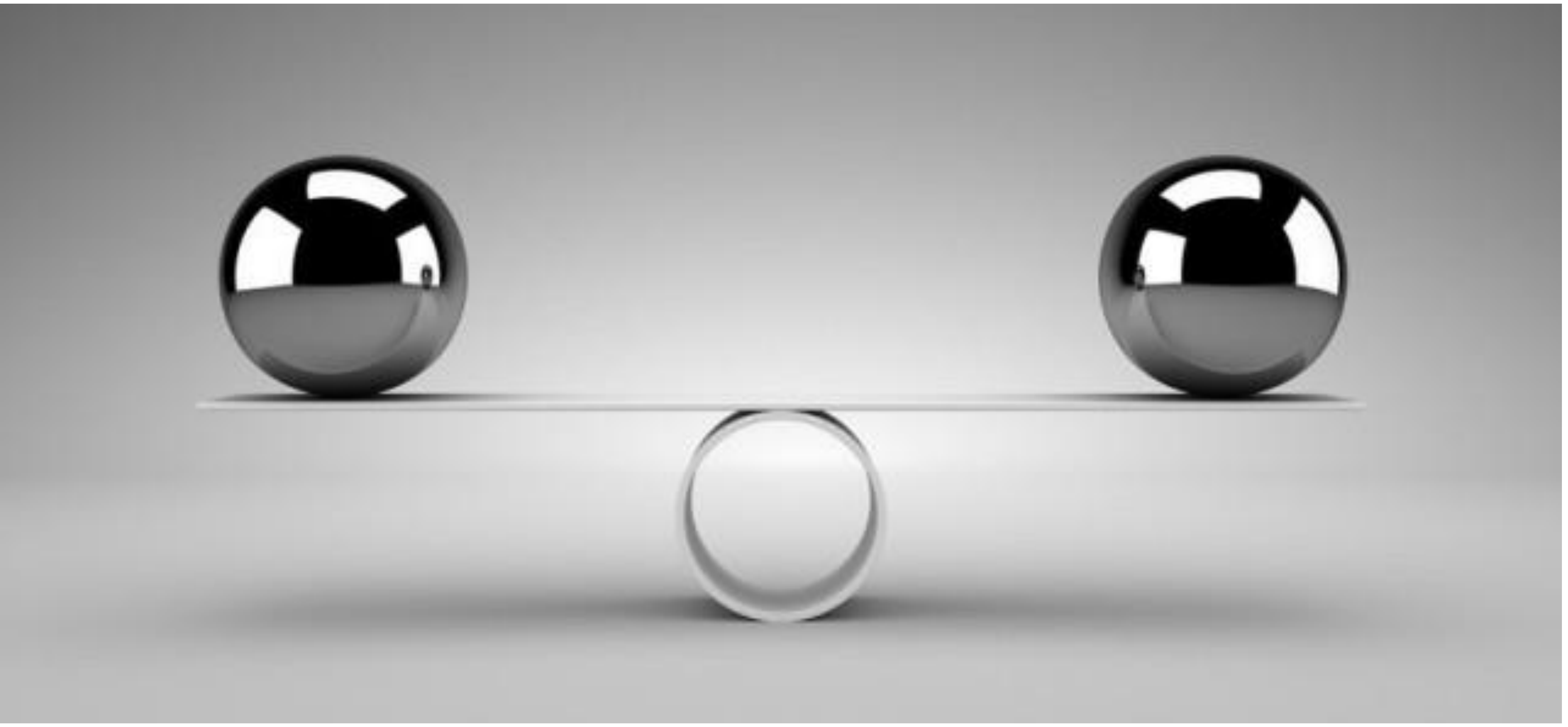
Mechanika i wytrzymałość materiałów



STATYKA

czyli równowaga

STATYKA

Statyka zajmuje się badaniem warunków równowagi układu sił działającego na dane ciało.

Metody rozwiązywania zadań w statyce

- wykreślna
- analityczna
- analityczno-wykreślna

STATYKA

Statyka zajmuje się badaniem warunków równowagi układu sił działającego na dane ciało.

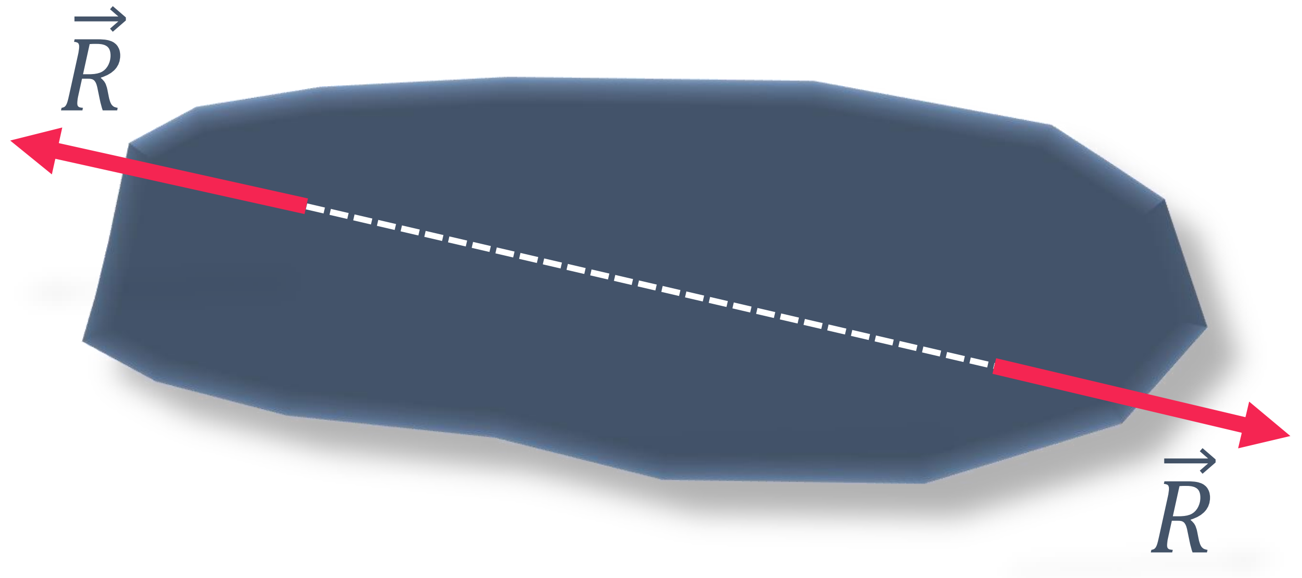
Gdy w zadaniu liczba niewiadomych przekroczy liczbę równań statyki – ZADANIE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE, dla rozwiązania którego trzeba odstąpić od modelu ciała sztywnego

Tym zajmuje się WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

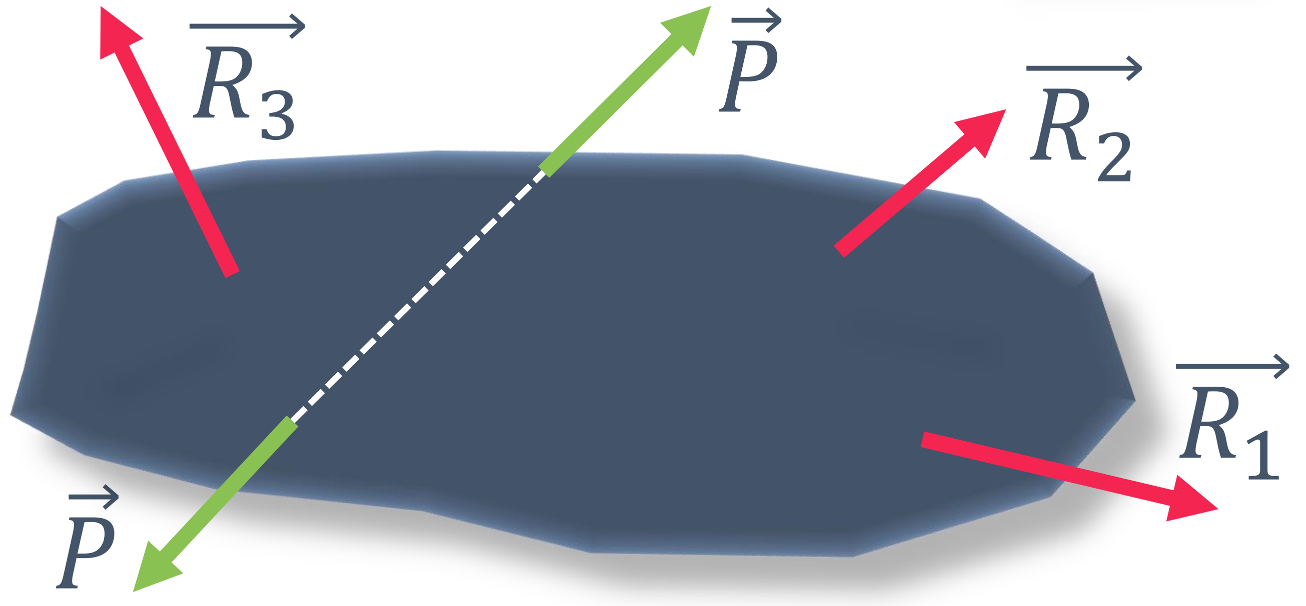
Aksjomaty statyki

Od czasów Euklidesa uznawano, że **aksjomaty** to zdania przyjmowane za prawdziwe, których nie dowodzi się w obrębie danej teorii matematycznej.

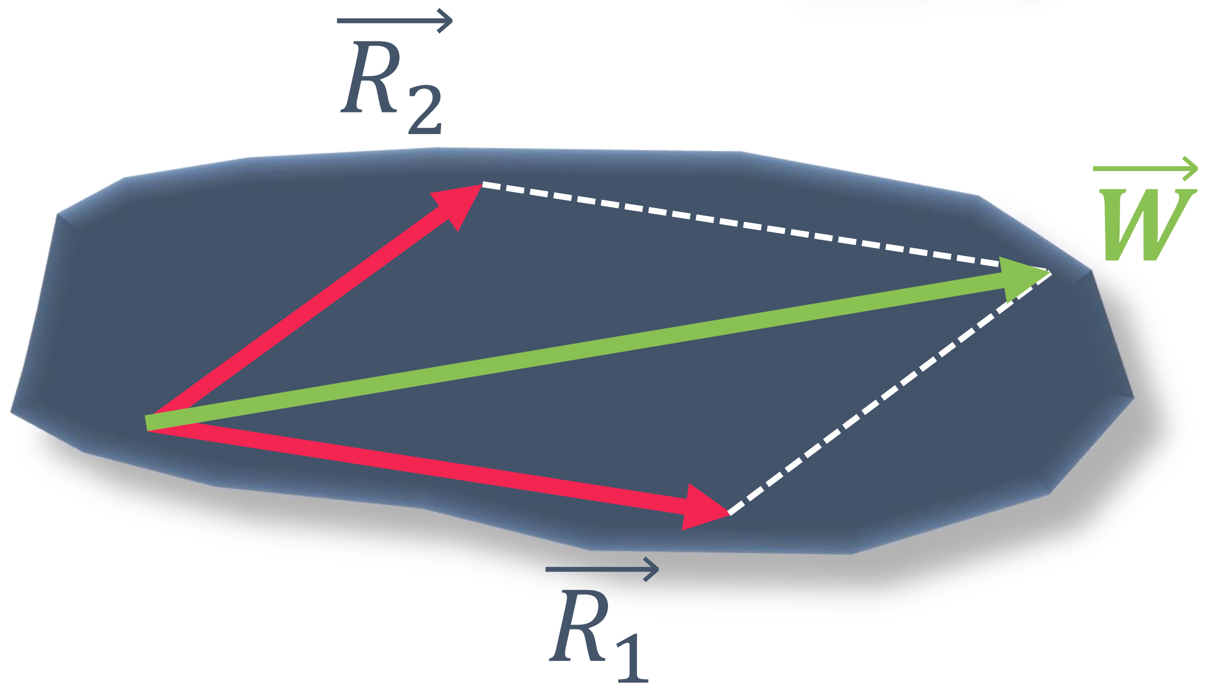
1. Dwie siły równoważą się wzajemnie jeżeli mają równe wartości (moduły), mają ten sam kierunek, ale są do siebie przeciwnie zwrócone.



2. Działanie układu sił oddziałujących na ciało nie ulegnie zmianie jeżeli dodamy lub odejmiemy od niego układ sił równoważny zeru.



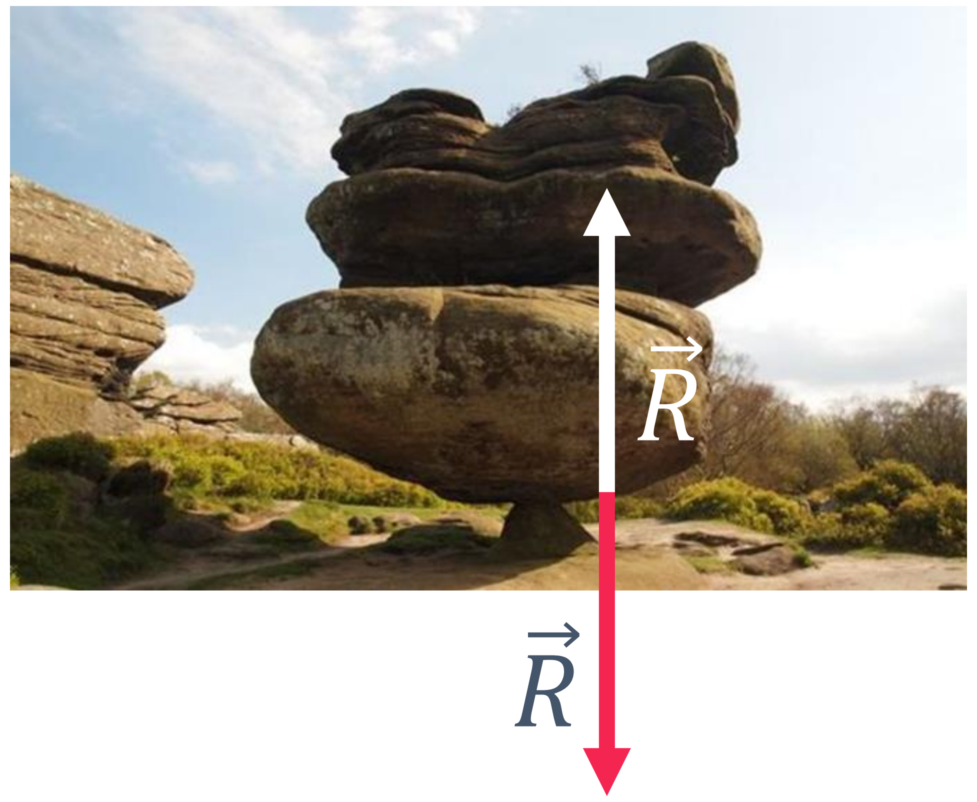
3. Wypadkowa dwóch sił przechodzi przez punkt ich przecięcia i wyraża się długością przekątnej równoległoboku zbudowanego na tych siłach (jest wektorową sumą sił składowych).



Aksjomaty statyki

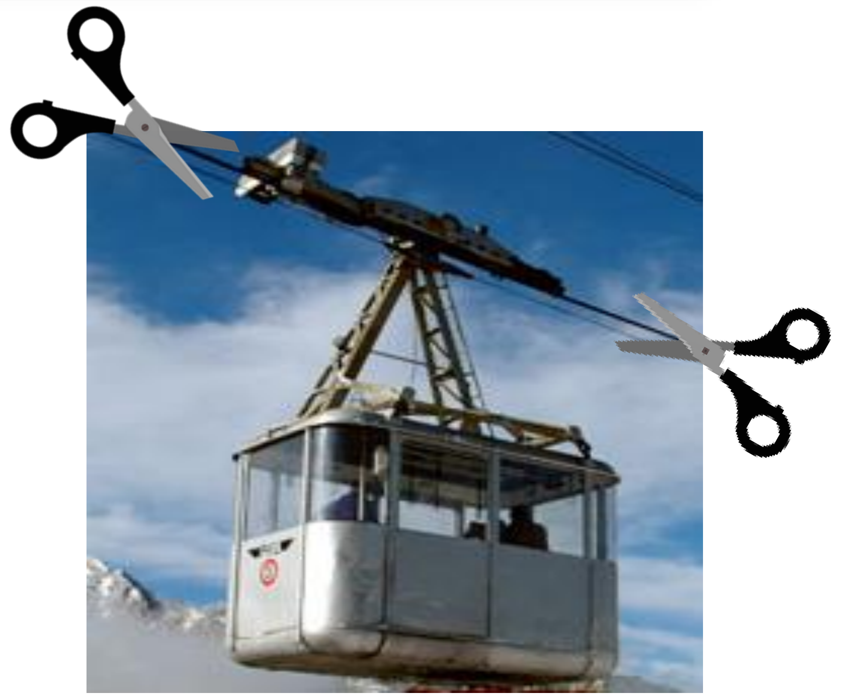
Od czasów Euklidesa uznawano, że **aksjomaty** to zdania przyjmowane za prawdziwe, których nie dowodzi się w obrębie danej teorii matematycznej.

4. Każdemu działaniu siły odpowiada równe przeciwdziałanie lecz przeciwnie skierowane.



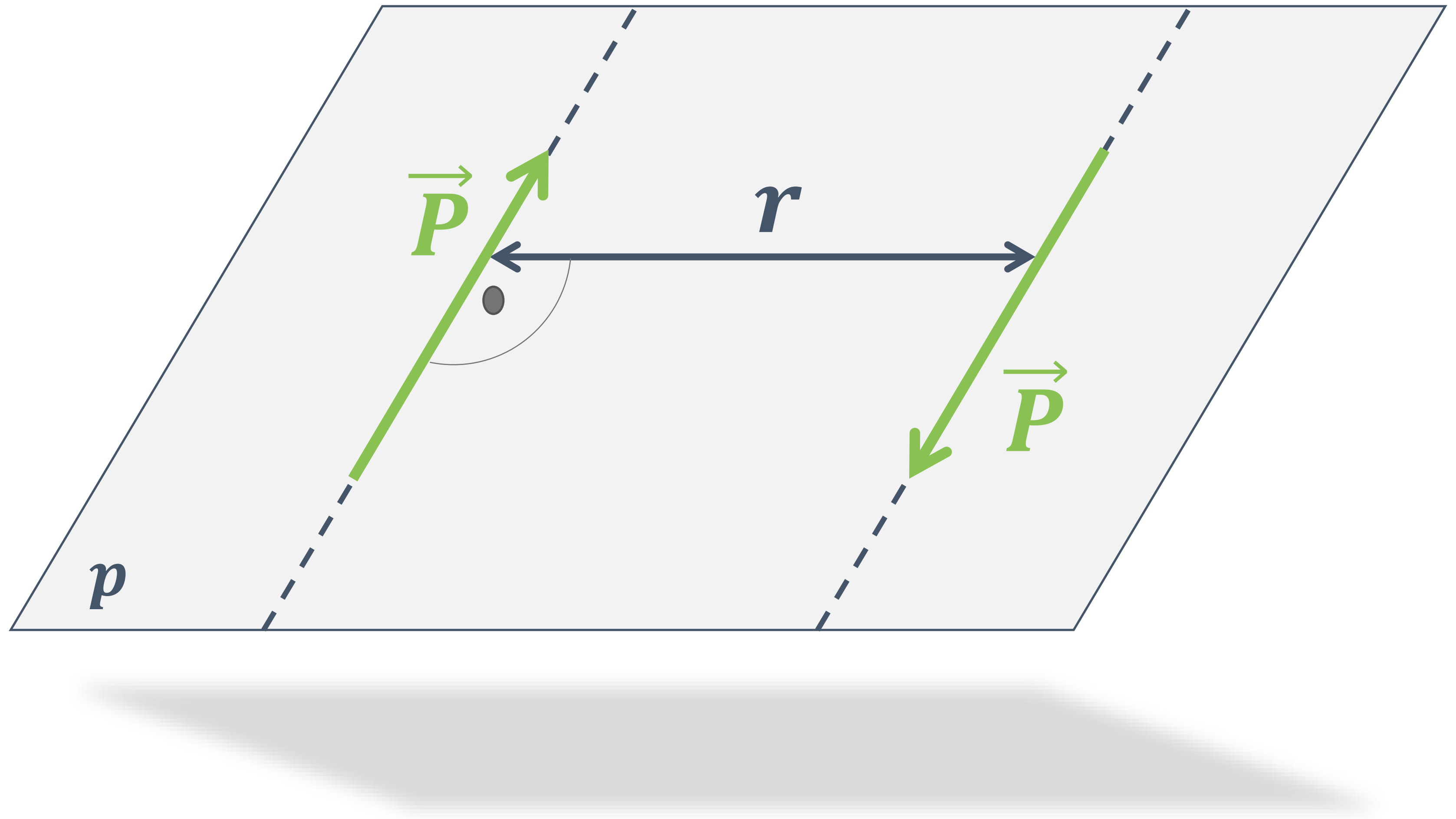
5. Równowaga ciała odkształcalnego nie zostanie naruszona jeśli ciało to stanie się ciałem sztywnym.

6. Ciało nieswobodne można traktować jak ciało swobodne jeśli zostanie myślowo uwolnione od więzów, zastępując ich działanie odpowiednimi reakcjami.



Para sił

Para sił jest układem dwóch sił równych, równoległych i przeciwnie skierowanych, ale zaczepionych w różnych punktach tego ciała. Siła wypadkowa pary jest równa zeru, dlatego przyłożenie do ciała pary sił nie zmienia jego całkowitego pędu.



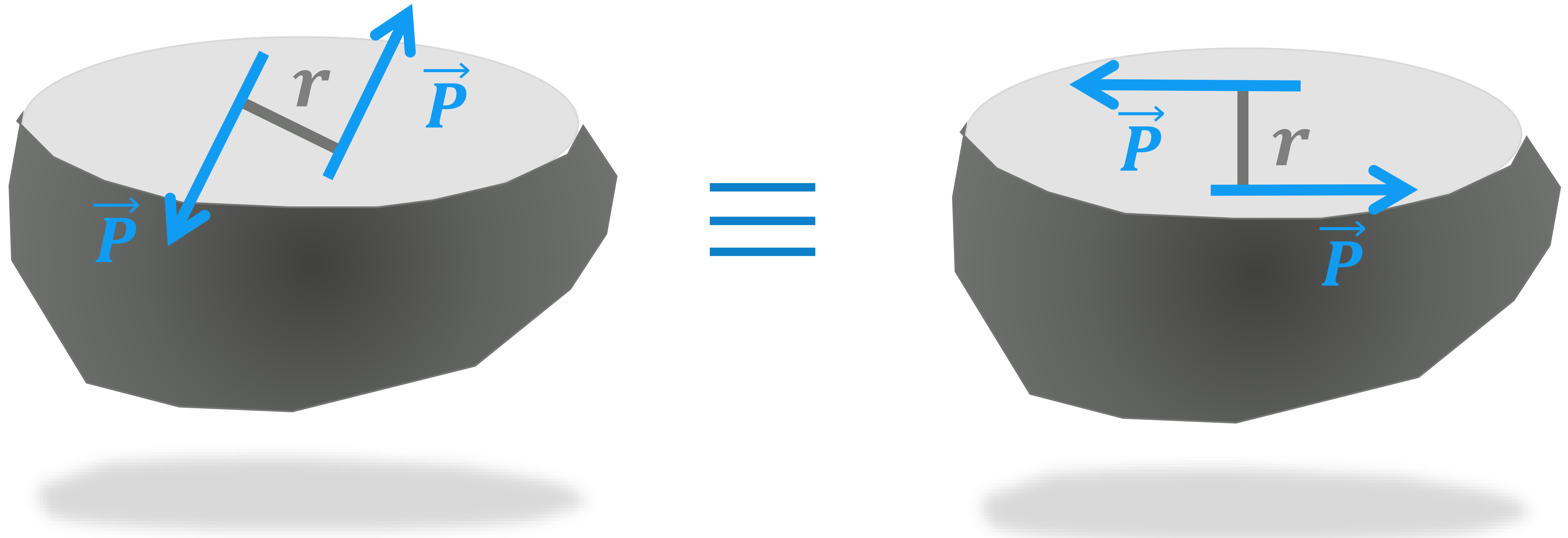
$\vec{P}$ – siła na płaszczyźnie,
r – odległość miedzy siłami,
p – płaszczyzna działania sił.

Siła, para sił oraz moment siły to **elementarne zagadnienia statystki**. Nie da się przedstawić ich w prostszy sposób.

Para sił

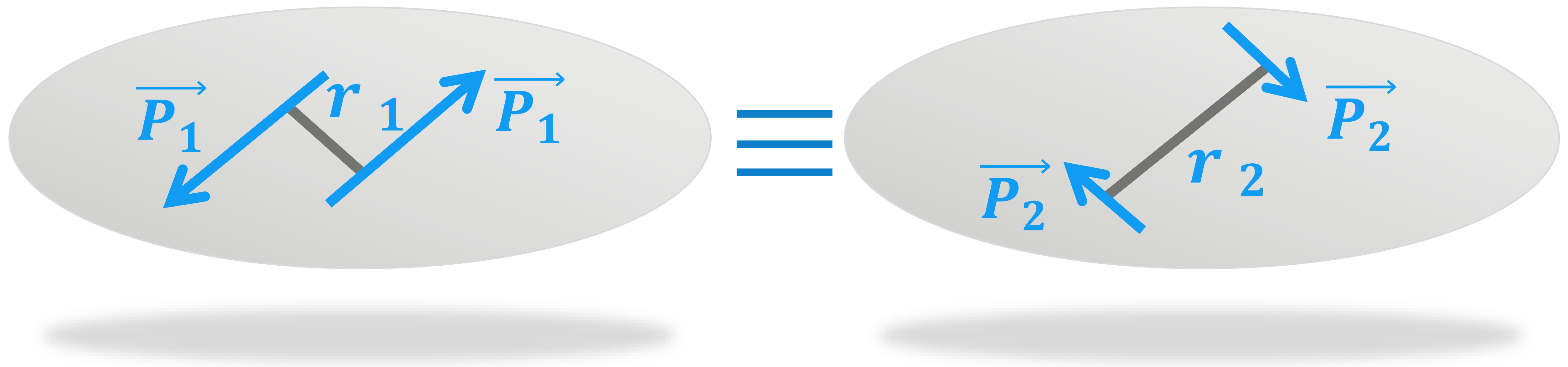
Właściwości pary sił

1. Działanie pary sił na ciało sztywne nie zmieni się, jeżeli para ta zostanie przesunięta w dowolne położenie w płaszczyźnie jej działania



2. Dwie pary sił o tym samym momencie leżące w tej samej płaszczyźnie są sobie równe

$$P_1 \times r_1 = P_2 \times r_2$$

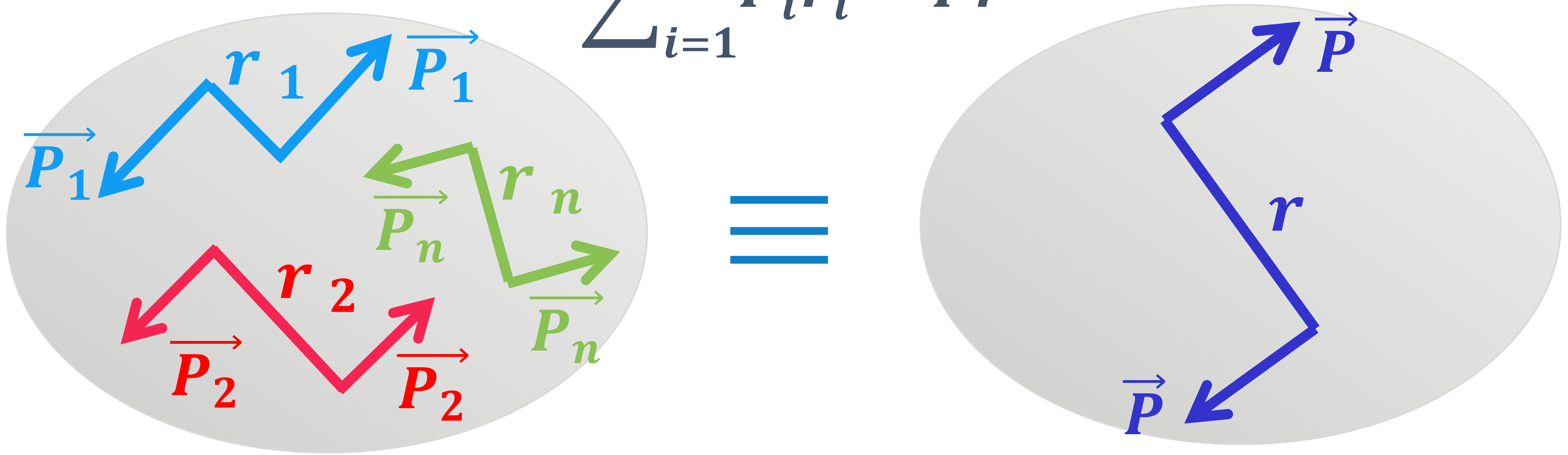


Para sił

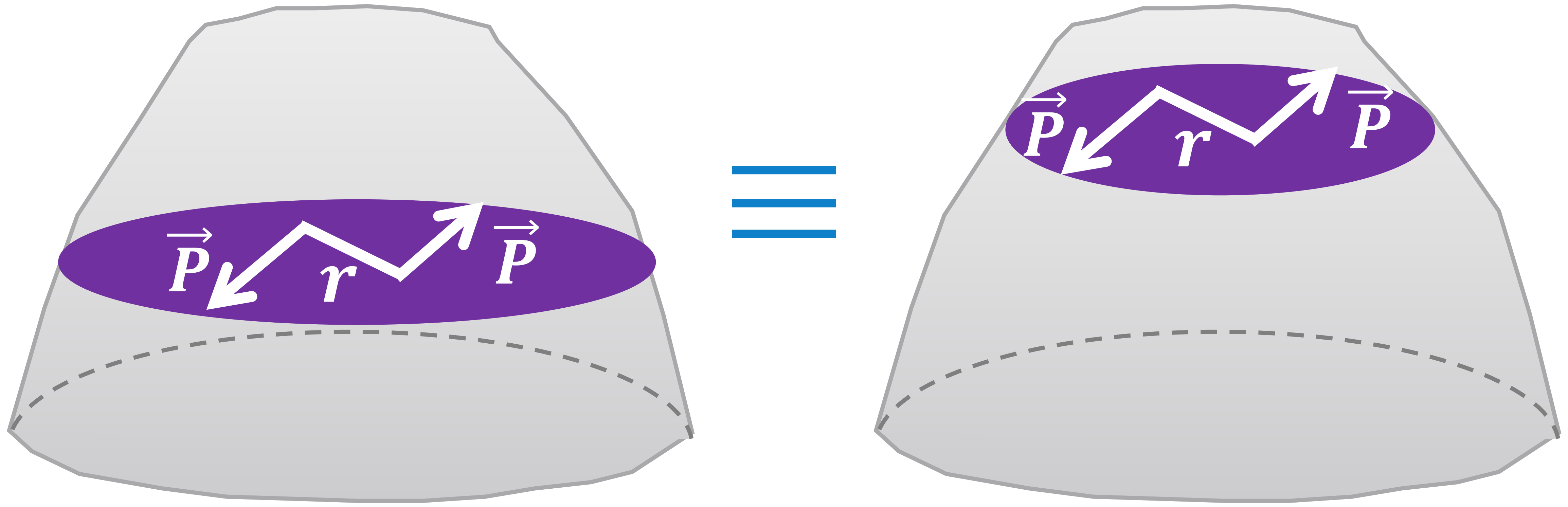
Właściwości pary sił

3. Jeżeli w płaszczyźnie działa kilka par sił, to można je zastąpić działaniem jednej pary sił o momencie równym algebraicznej sumie momentów par sił składowych

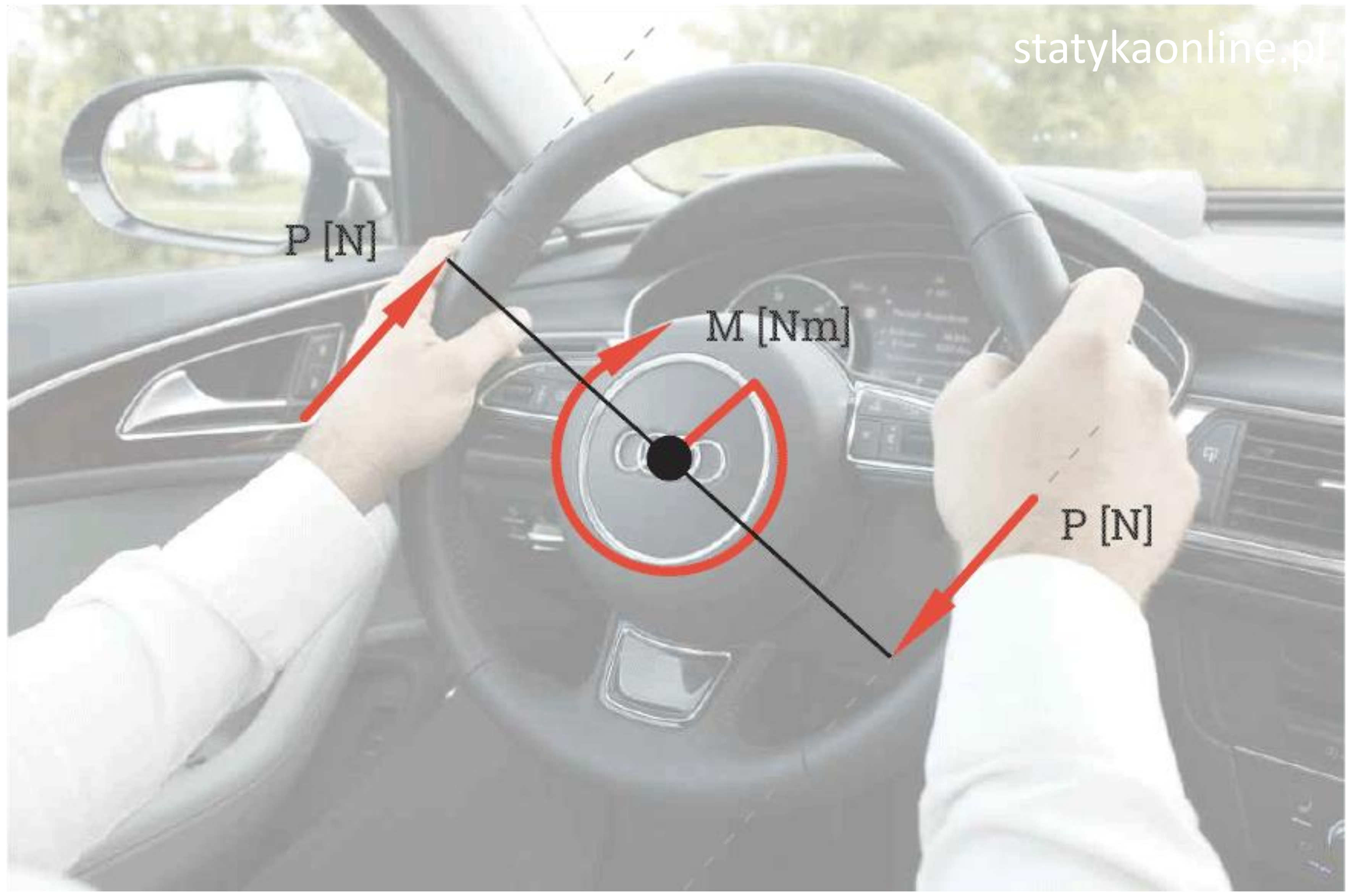
$$\sum_{i=1}^{n} P_i r_i = Pr$$

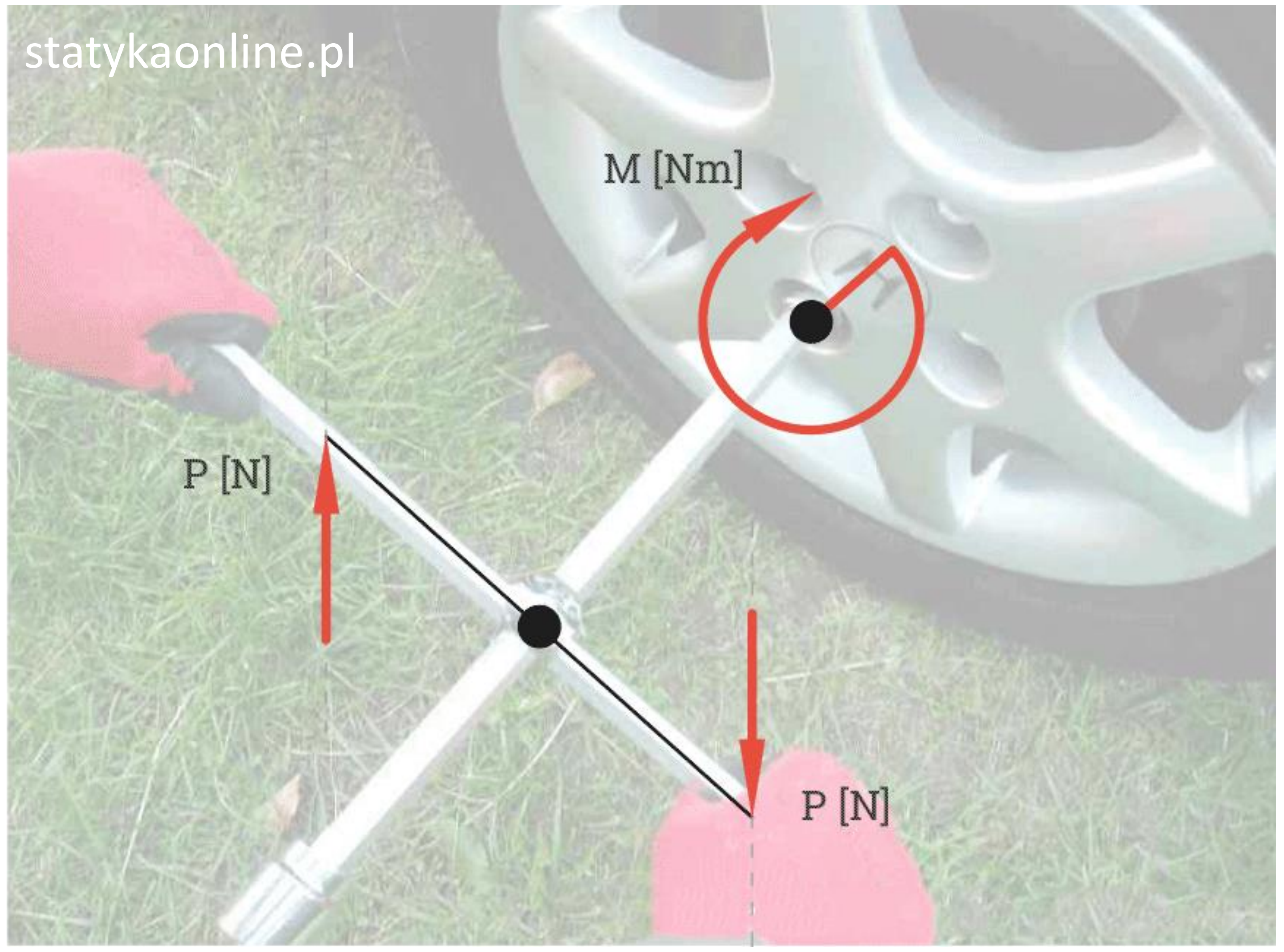


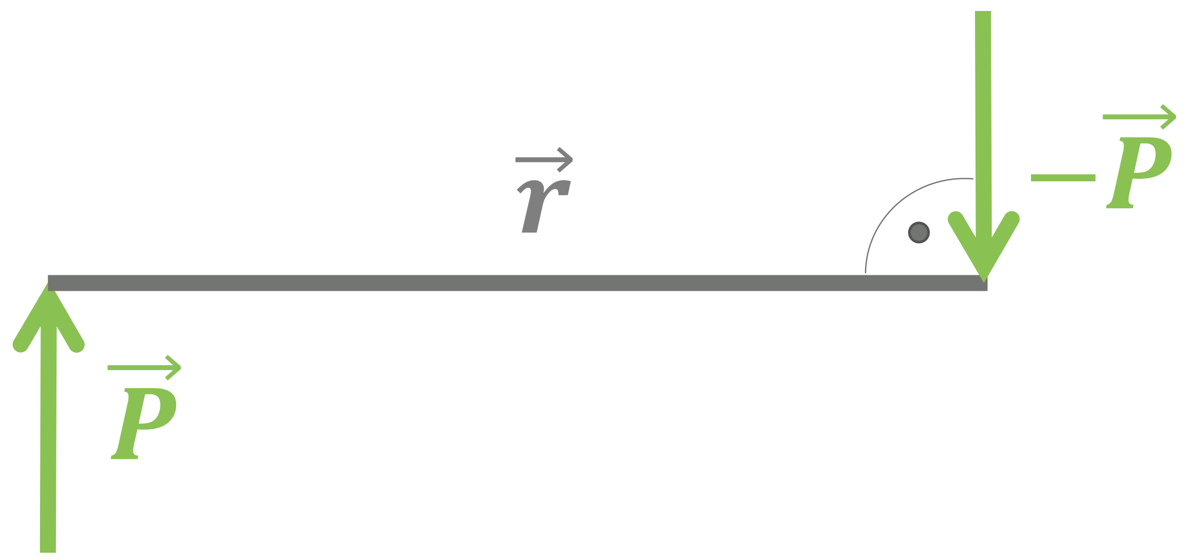
4. Działanie pary sił na ciało sztywne nie ulegnie zmianie, jeżeli parę sił zostanie przeniesiona do płaszczyzny równoległej



Moment pary sił



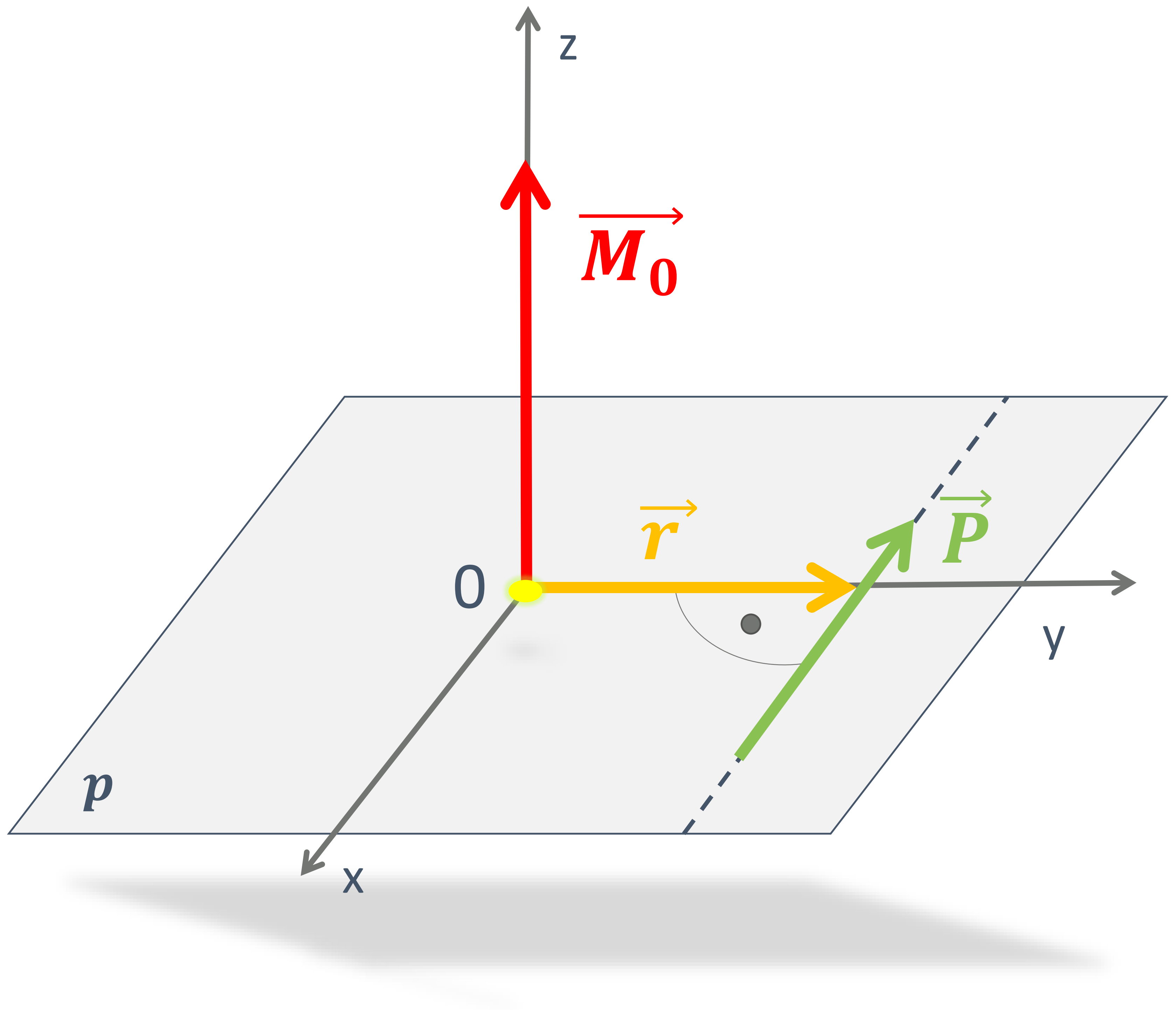




$$\longrightarrow \quad \vec{M} = \vec{P} \cdot \frac{1}{2}\vec{r}$$

Moment siły względem bieguna

Moment siły $\vec{P}$ względem punktu O jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego $\vec{r}$, o początku w punkcie O i końcu w punkcie przyłożenia siły, oraz siły $\vec{P}$.



Moment w zapisie wektorowym

$$\overrightarrow{M_0}(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}$$

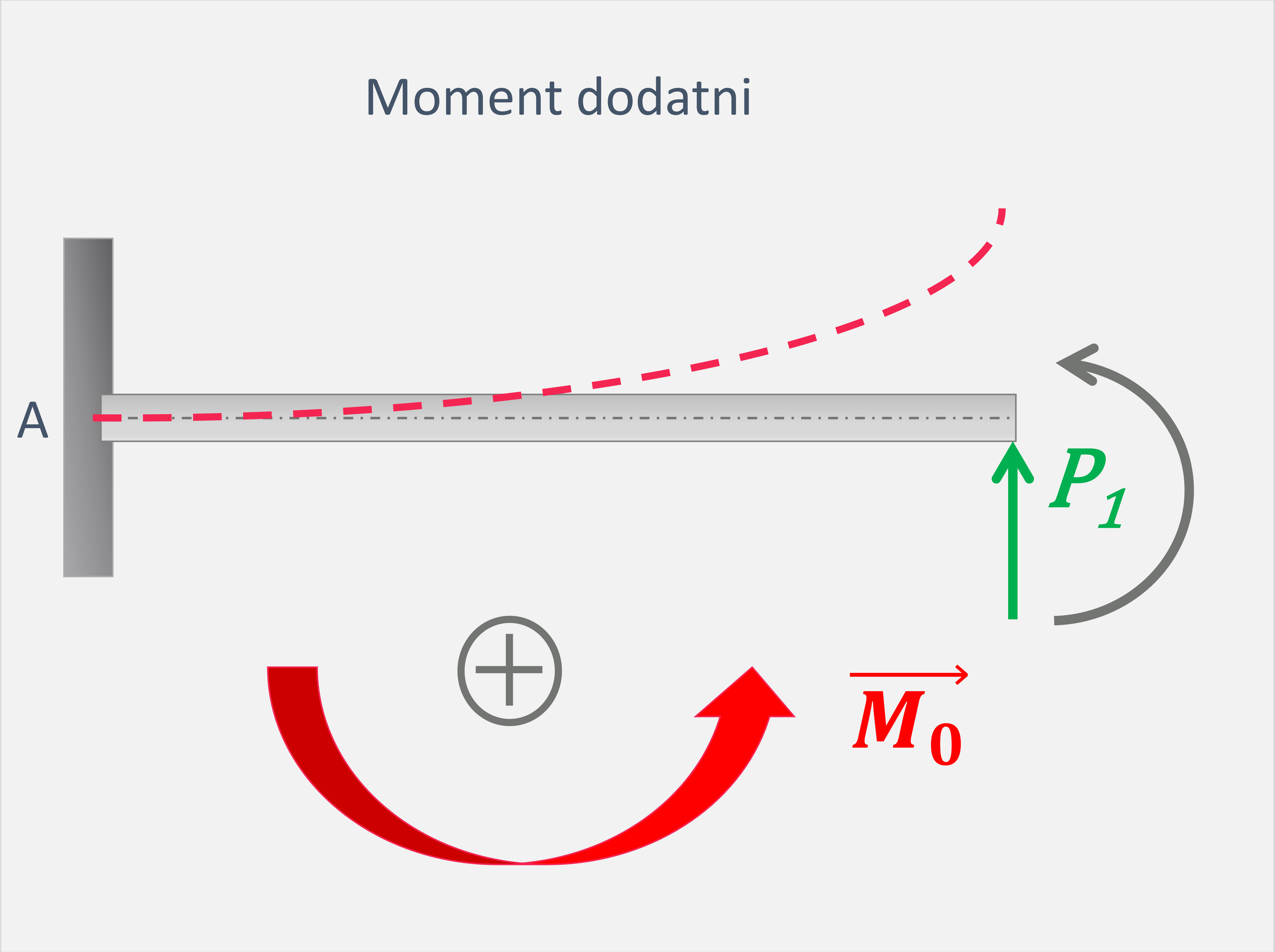
Rachunek jednostek

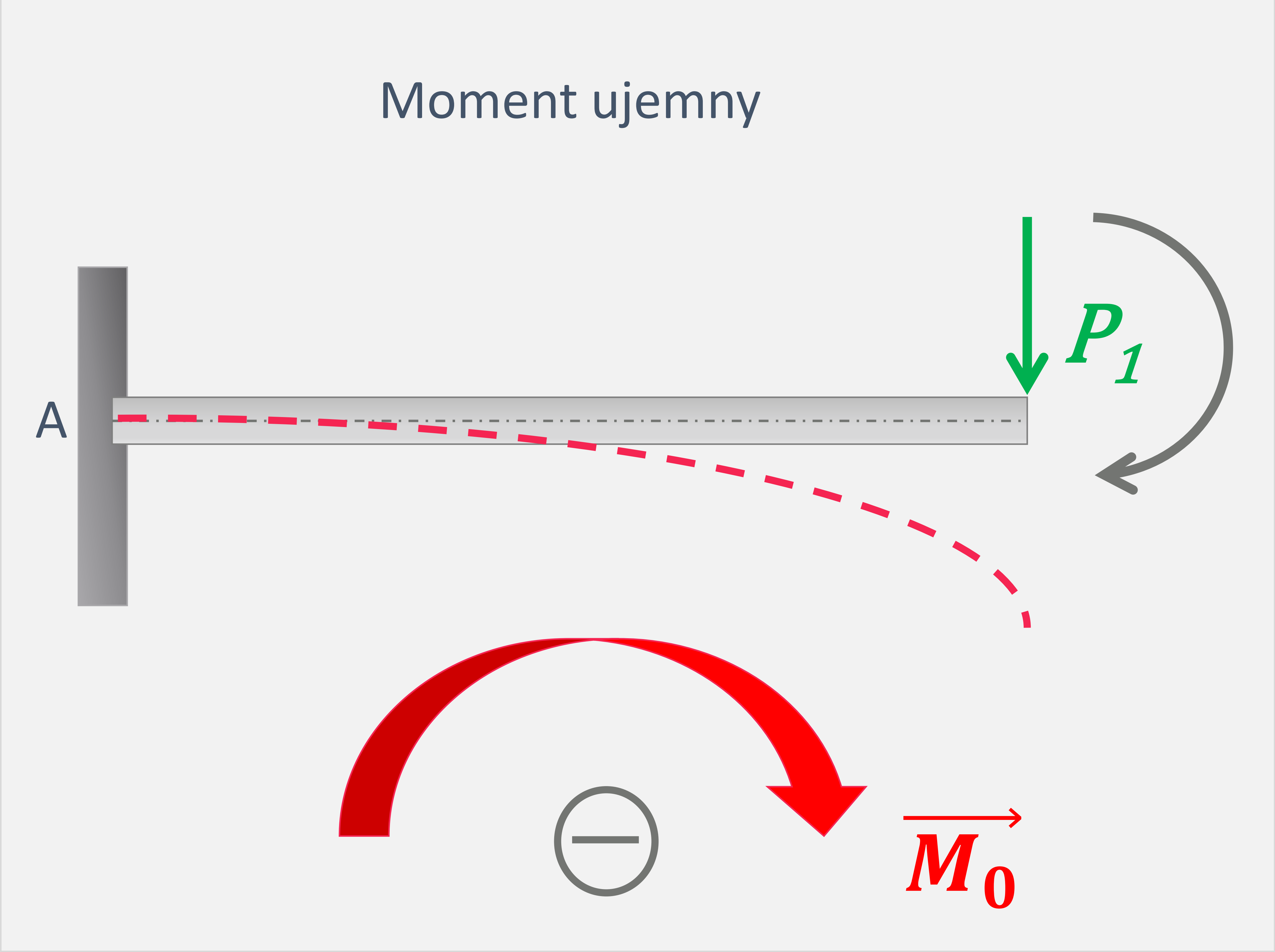
$[Nm]=[m]\cdot[N]$

Kierunek wektora momentu jest prostopadły do płaszczyzny działania siły $\vec{P}$

Zwrot wektora momentu zgodny z „regułą prawej dłoni”

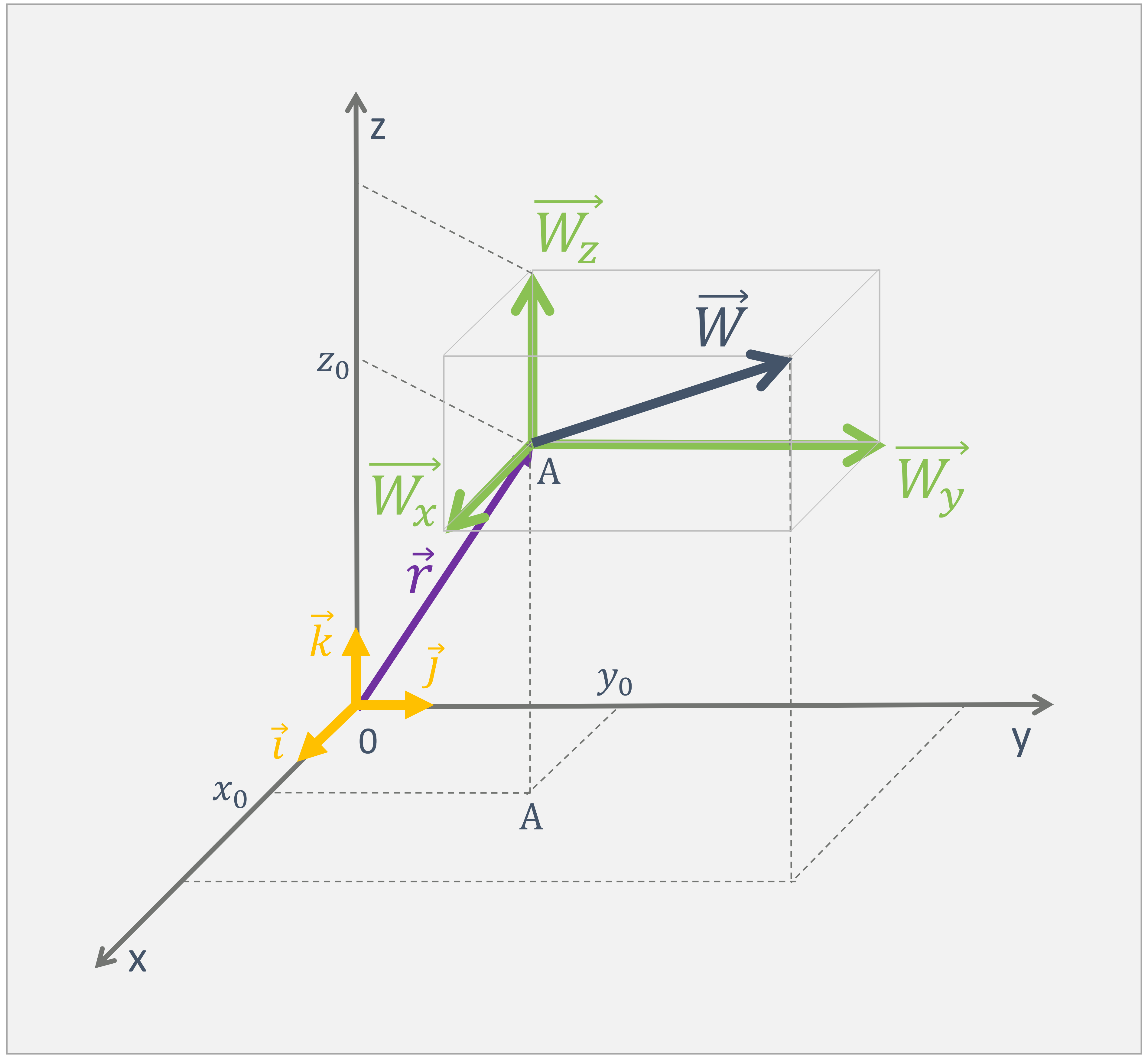
Moment siły względem bieguna





Wektor momentu siły względem bieguna nie ma punktu przyłożenia

Moment siły względem osi



$$\overrightarrow{M_0}(\vec{W}) = \vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix},$$

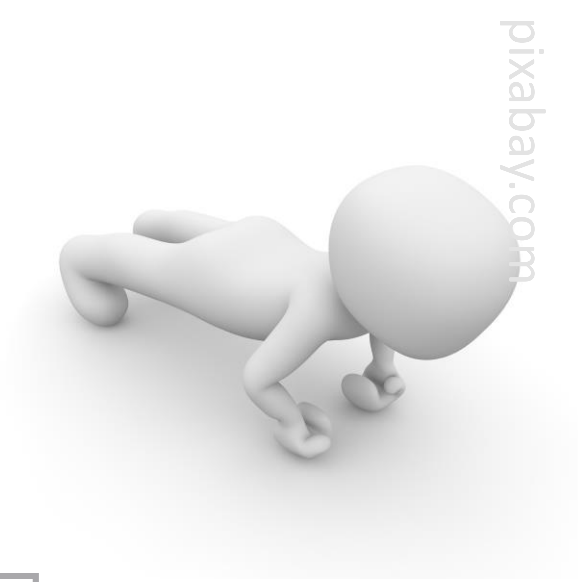
$$\overrightarrow{M_0} = \vec{i}W_x + \vec{j}W_y + \vec{k}W_z$$
$$= \vec{i}(W_z y_0 - W_y z_0) + \vec{j}(W_x z_0 - W_z x_0) + \vec{k}(W_y x_0 - W_x y_0),$$

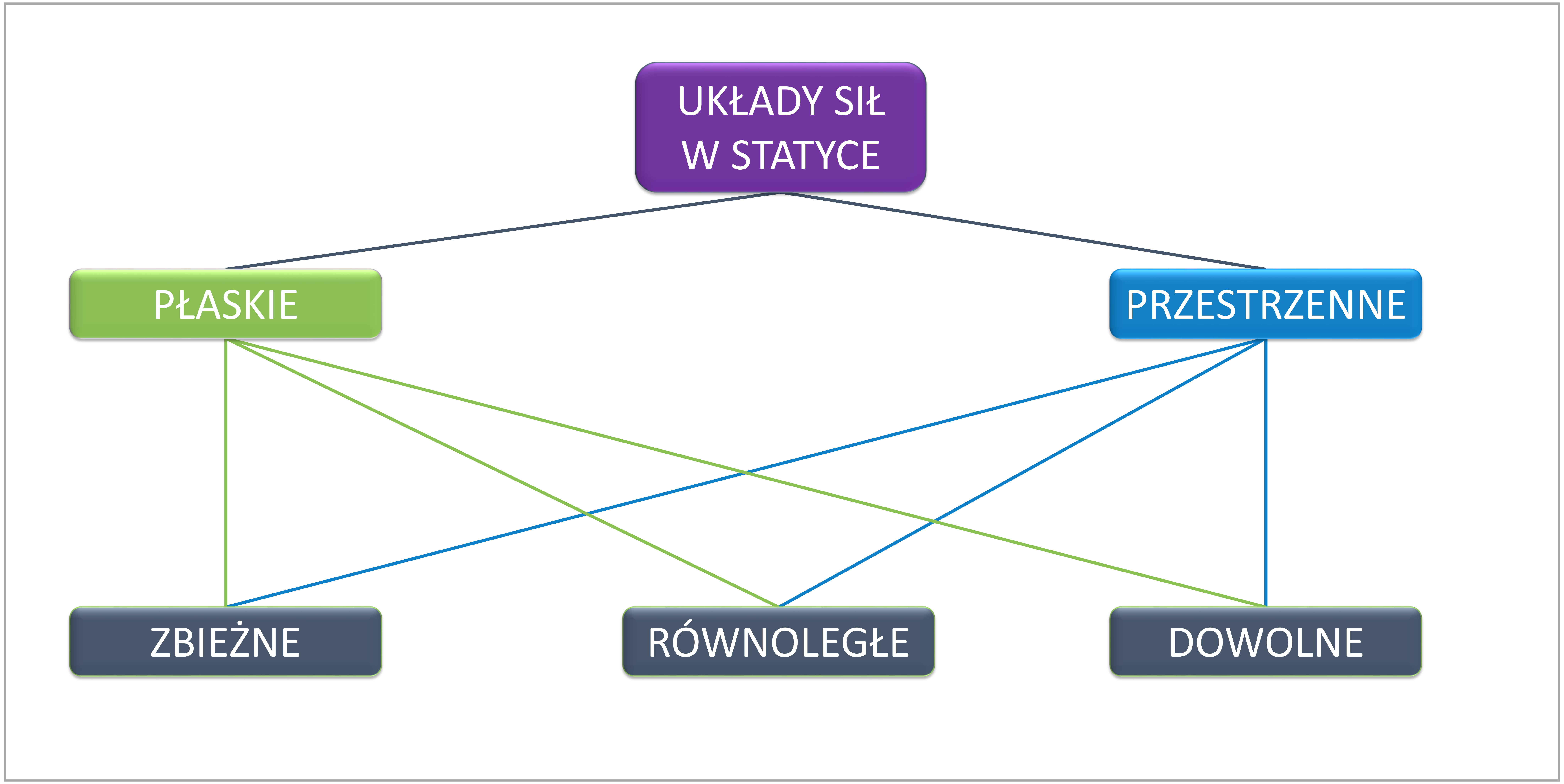
gdzie $\vec{r}(x_0, y_0, z_0), \vec{W}(W_x, W_y, W_z)$, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - wersory jednostkowe.

$$M_x = W_z y_0 - W_y z_0,$$
$$M_y = W_x z_0 - W_z x_0,$$
$$M_z = W_y x_0 - W_x y_0,$$

$$M_0(\vec{W}) = \sqrt{M_x{}^2 + M_y{}^2 + M_z{}^2}.$$

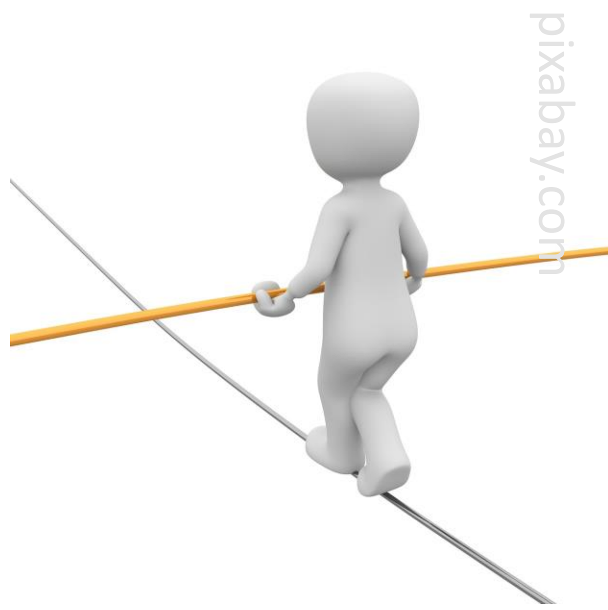
Układy sił i ich równowaga





Układy sił i ich równowaga

- PŁASKIE UKŁADY SIŁ
  - ZBIEŻNE
  - RÓWNOLEGŁE
  - DOWOLNE



Układy sił i ich równowaga

Równowaga płaskiego układu sił zachodzi, gdy wektor główny $\vec{\boldsymbol{R}}$ tego układu jest równy zero oraz gdy moment główny $\overrightarrow{\boldsymbol{M}_0}$ względem środka redukcji ***0*** jest równy zero.

W zapisie wektorowym

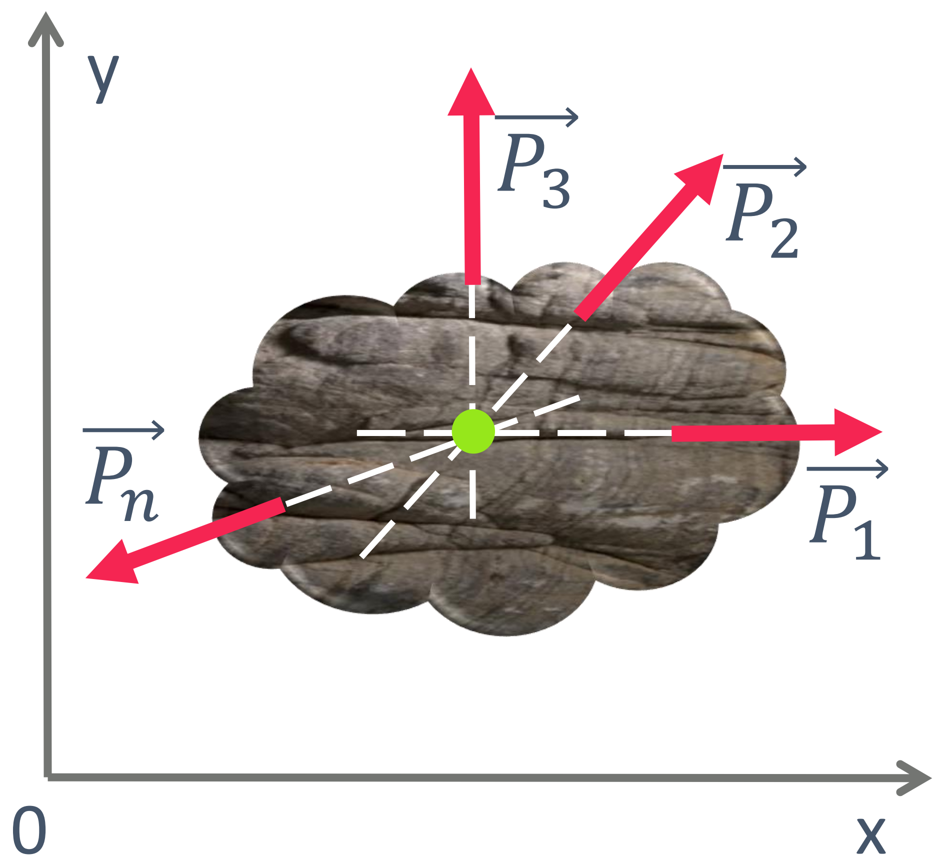
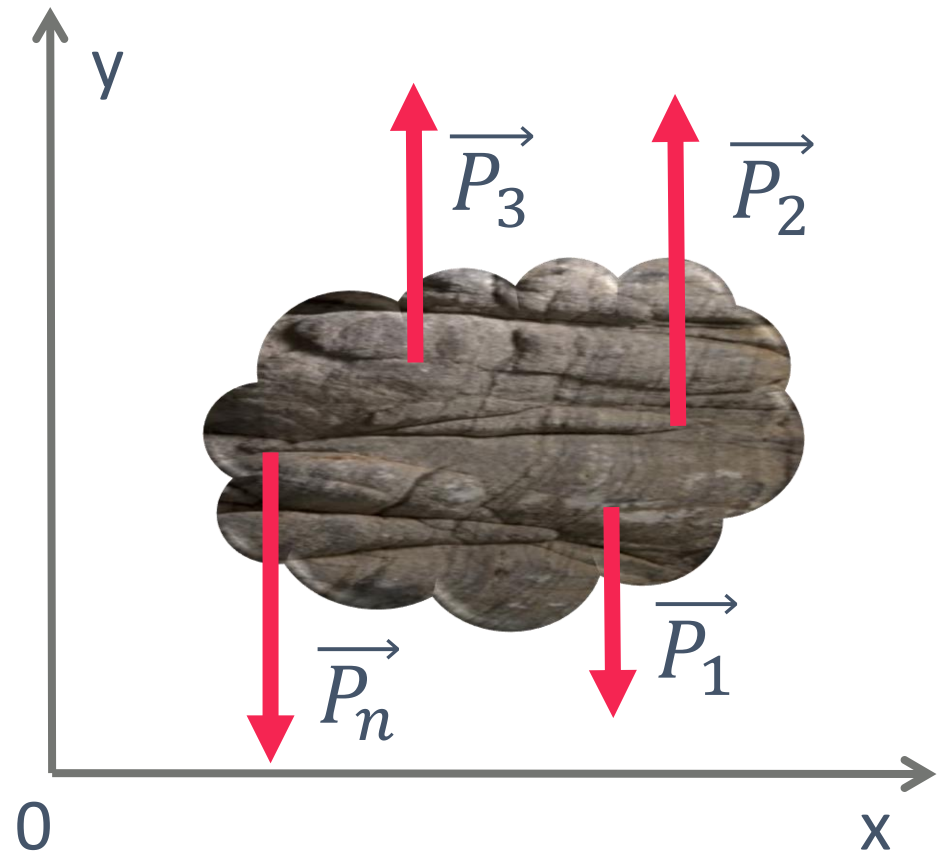
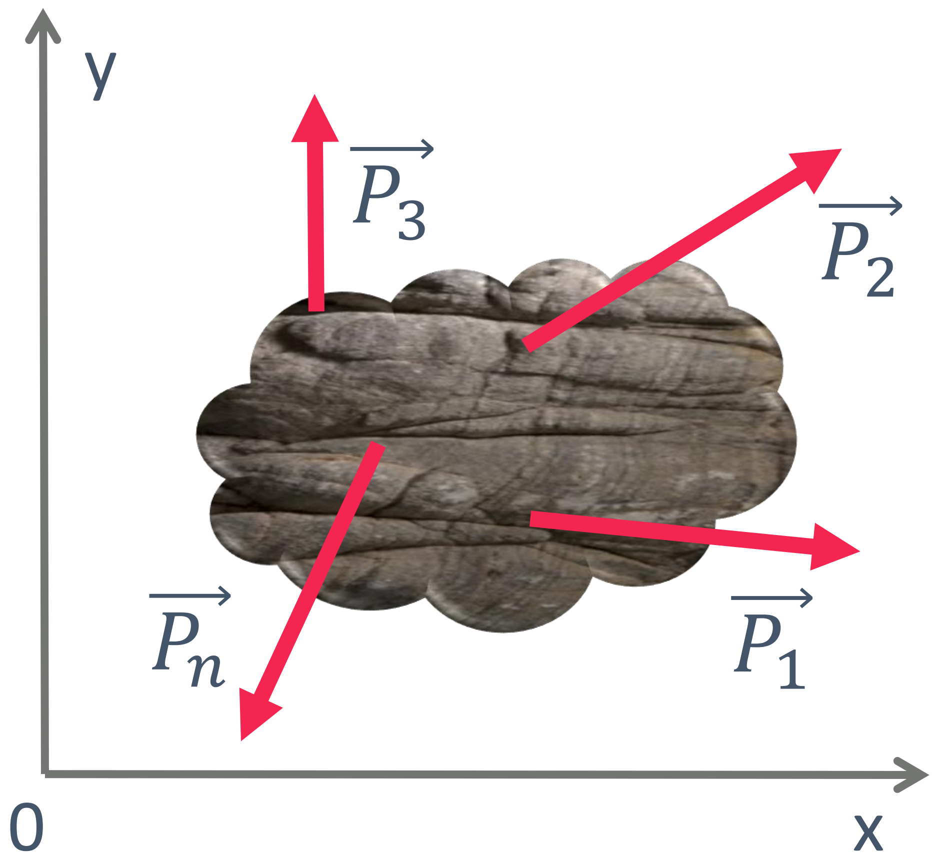
$$\vec{R} = \vec{W} = 0, \qquad \overrightarrow{M_0} = 0$$

W zapisie analitycznym

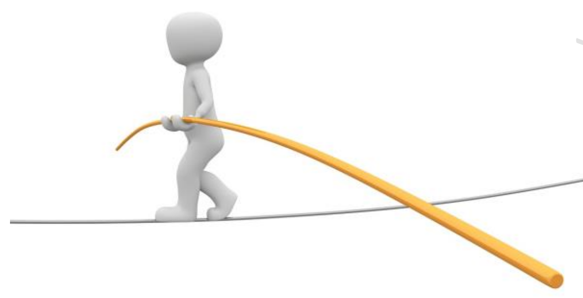
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} P_{yi} = 0, \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{0i} = 0.$$

Układy sił i ich równowaga

Płaskie układy sił

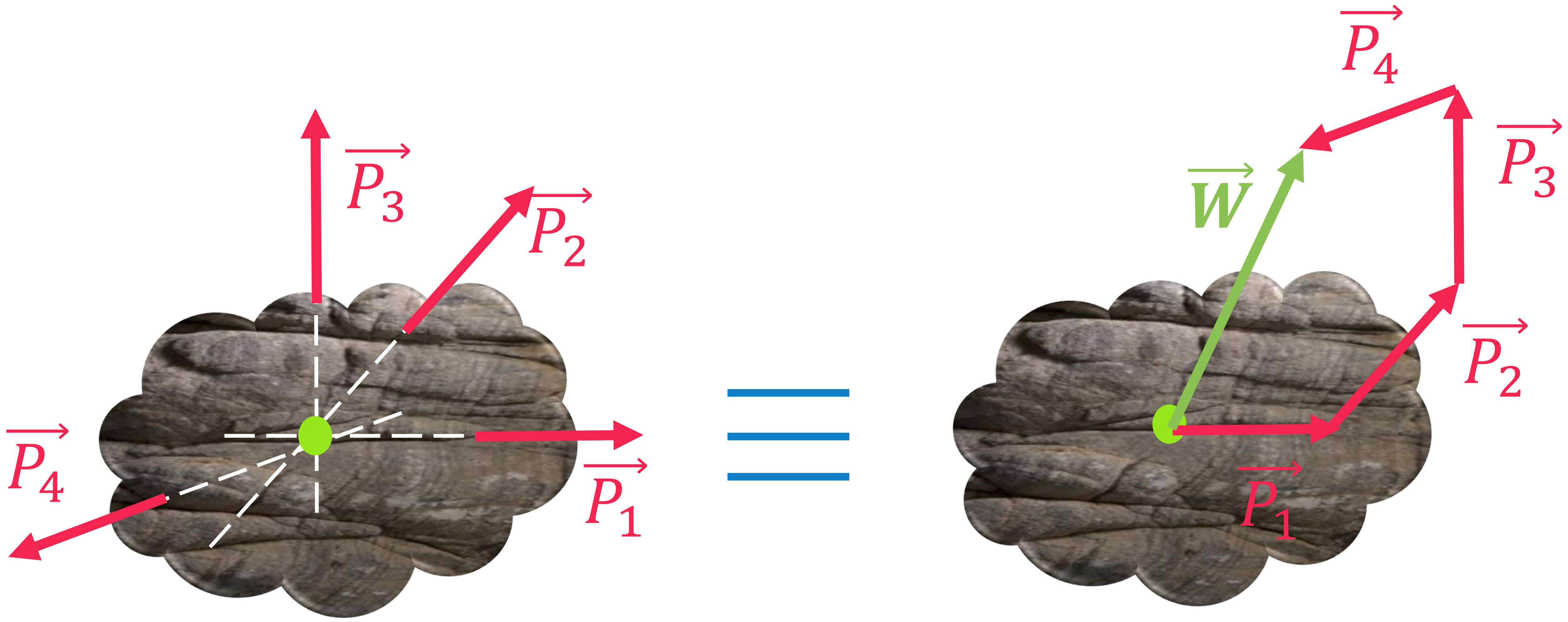
	ZBIEŻNY	RÓWNOLEGŁY	DOWOLNY
Schemat układu			
Warunki równowagi	$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} P_{yi} = 0.$	$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{0i} = 0.$	$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} P_{yi} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{0i} = 0.$

Układy sił i ich równowaga



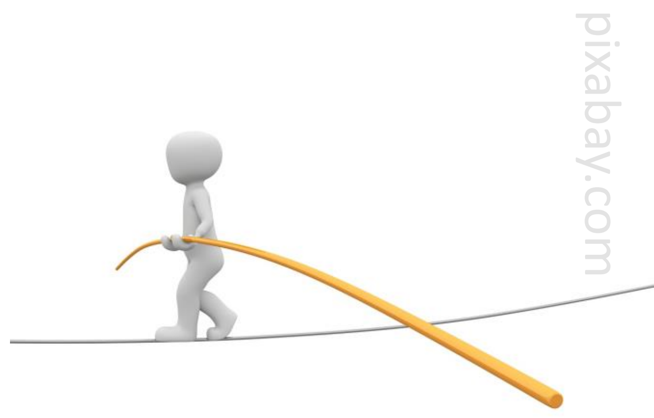
Redukcja zbieżnego układu sił

Układ sił zbieżnych można zastąpić działaniem jednej siły wypadkowej – **wektora głównego** – będącego sumą wszystkich sił działających na ciało, przyłożonego w punkcie przecięcia kierunków działania tych sił.



$$\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i}$$

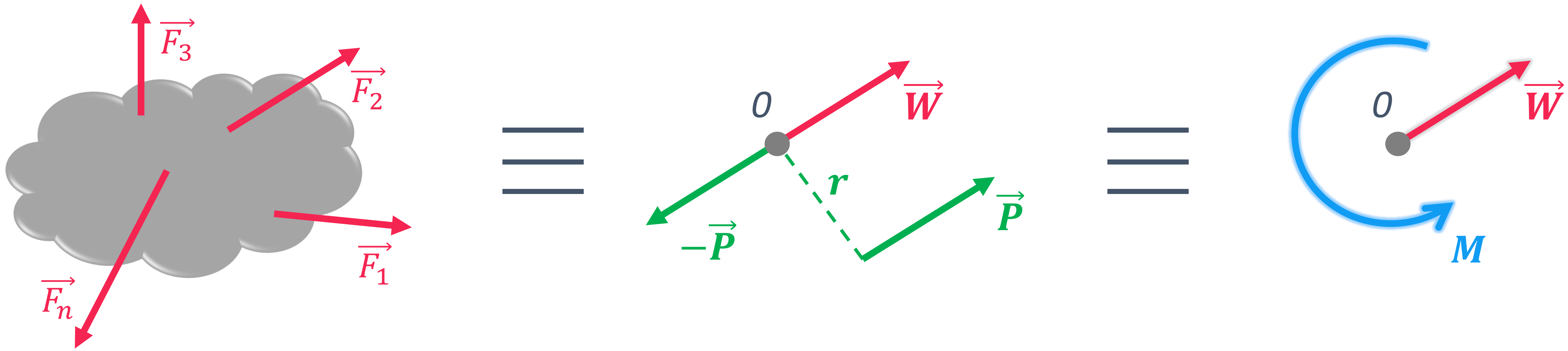
Układy sił i ich równowaga



Redukcja płaskiego dowolnego układu sił

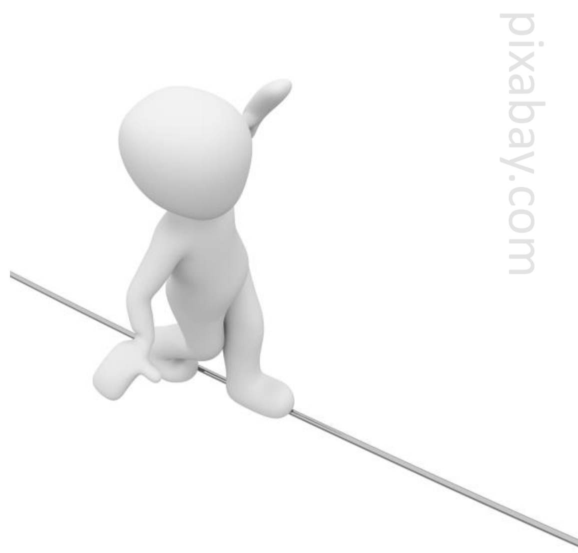
W wyniku redukcji dowolny układ sił, działający na ciało sztywne, zastąpiono:

1. **wektorem głównym $\vec{W}$** – będącym sumą wszystkich sił działających na ciało,
2. **parą sił** o momencie M równym algebraicznej sumie momentów par sił składowych



$$\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i}$$

$$M = Pr = \sum_{i=1}^{n} F_i r_i$$

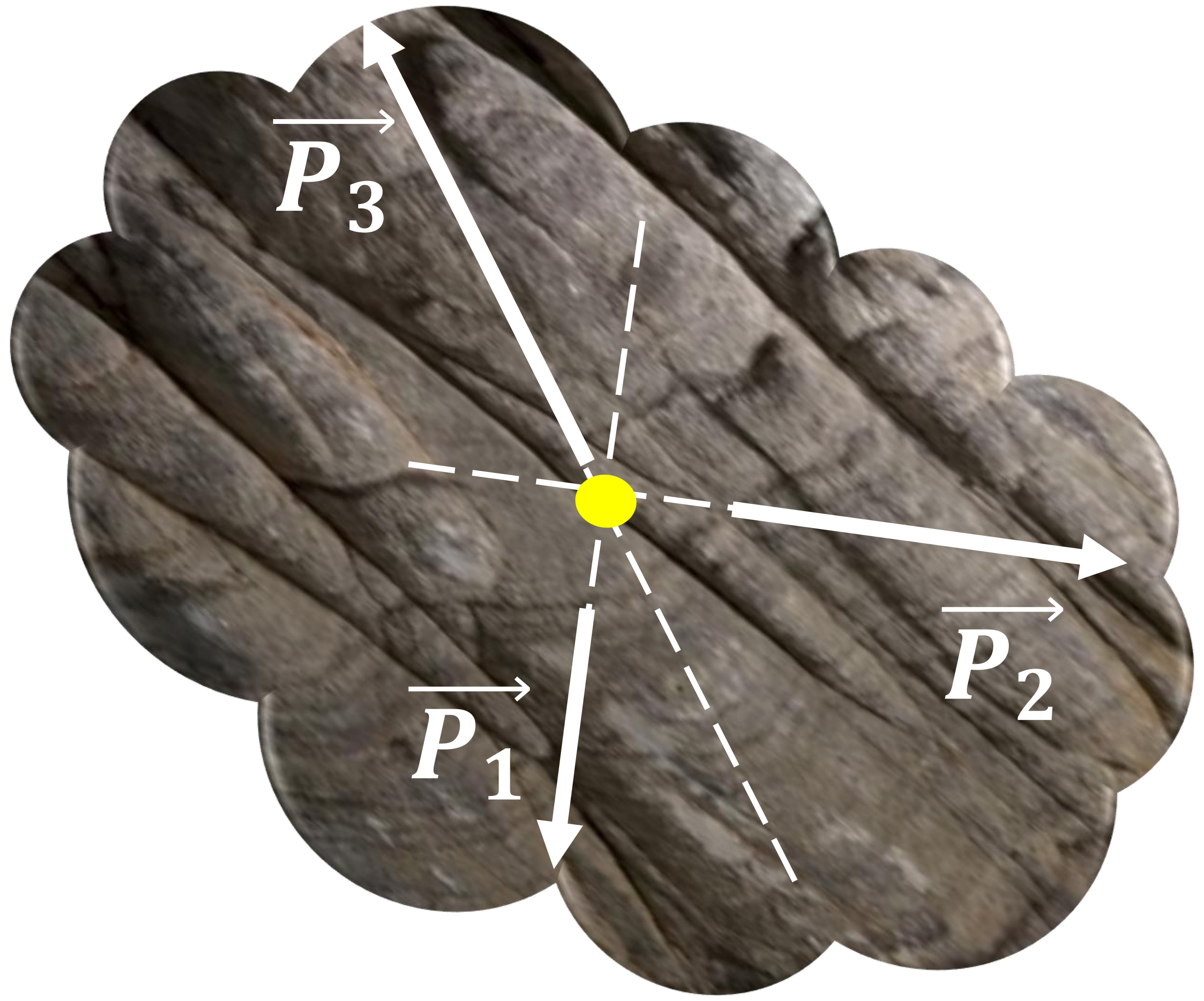


Układy sił i ich równowaga

Twierdzenie o trzech siłach

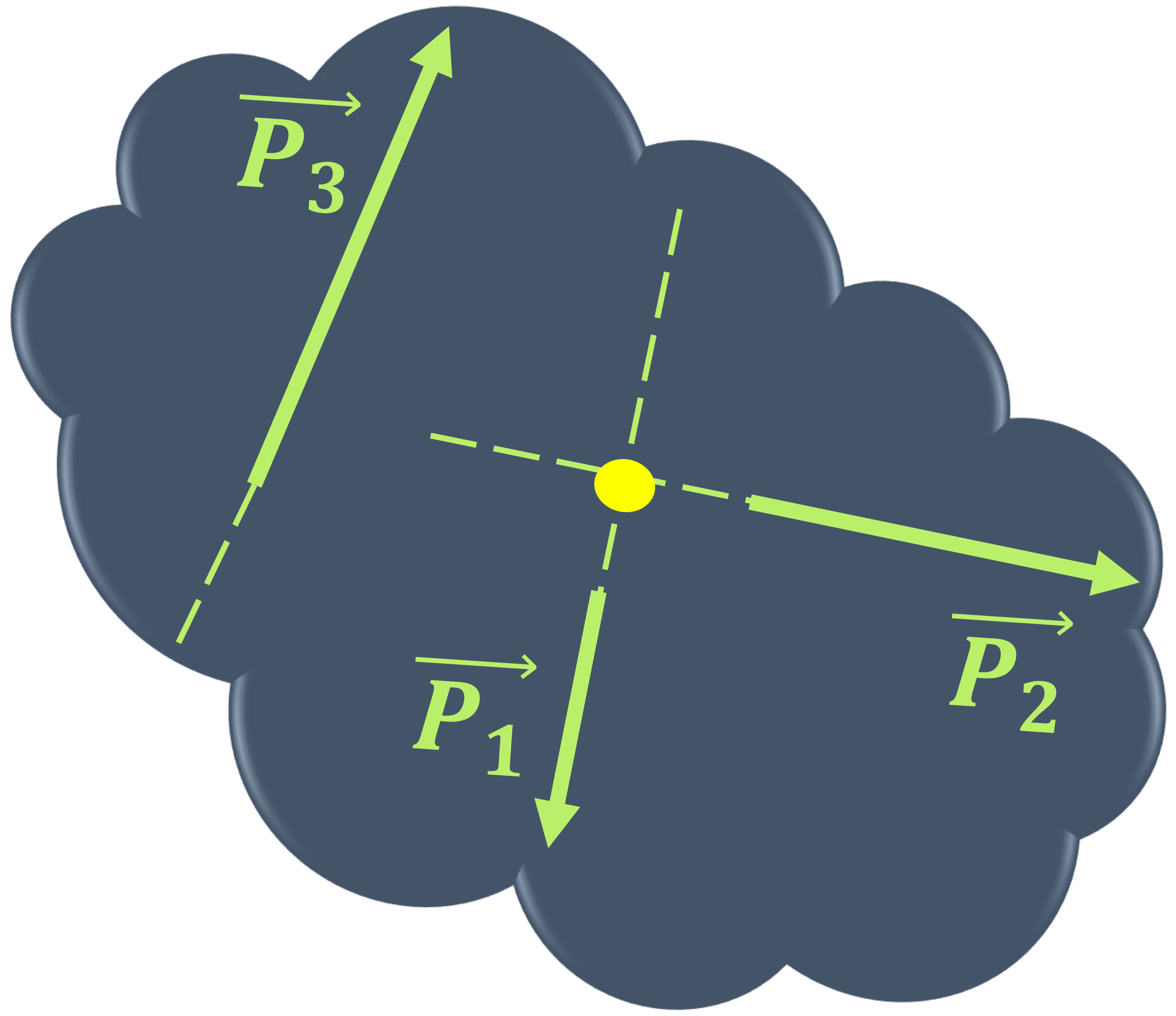
Układ trzech sił jest w równowadze jeżeli kierunki działania tych sił przecinają się w jednym punkcie (zbieżny układ sił) oraz wielobok utworzony z tych sił jest wielobokiem zamkniętym.

PRZYKŁAD:



Układ sił równoważących się pod warunkiem

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3} = 0$$



Układ sił nie mogący się równoważyć nawet pod warunkiem

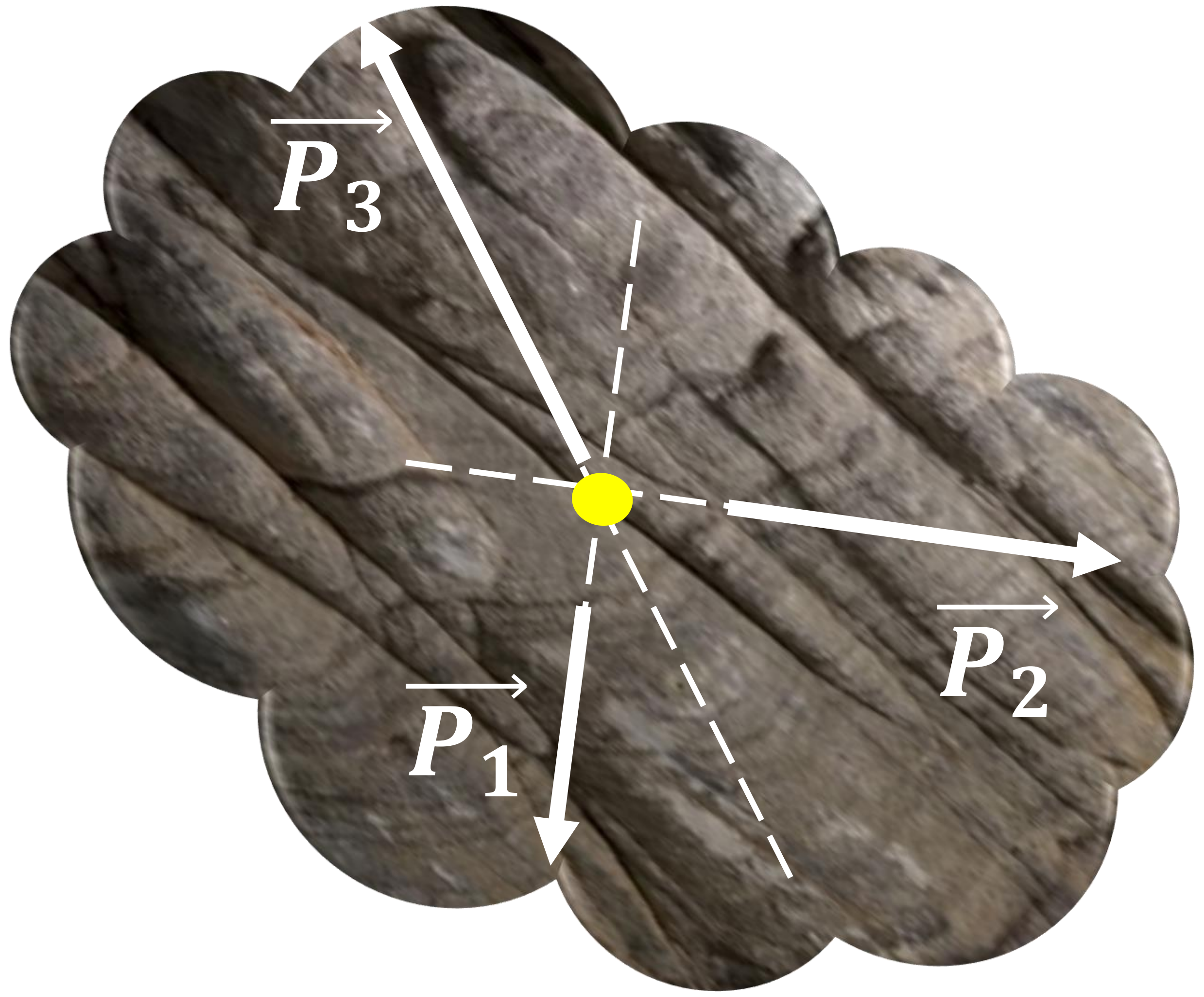
$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3} = 0$$

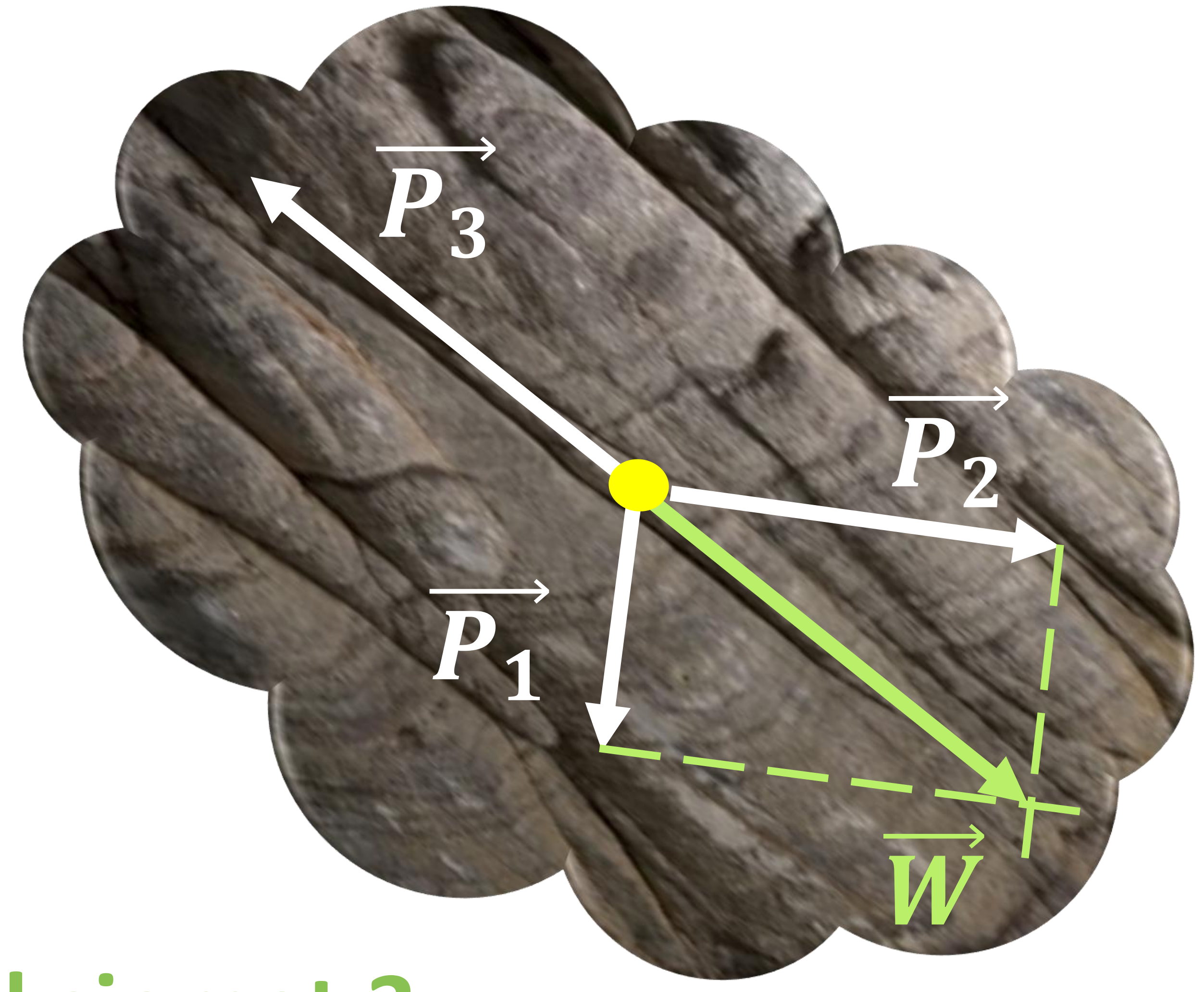
Układy sił i ich równowaga

Twierdzenie o trzech siłach

Układ trzech sił jest w równowadze jeżeli kierunki działania tych sił przecinają się w jednym punkcie (zbieżny układ sił) oraz wielobok utworzony z tych sił jest wielobokiem zamkniętym.

DOWÓD:





$$\vec{P}_3 = -\vec{W}$$

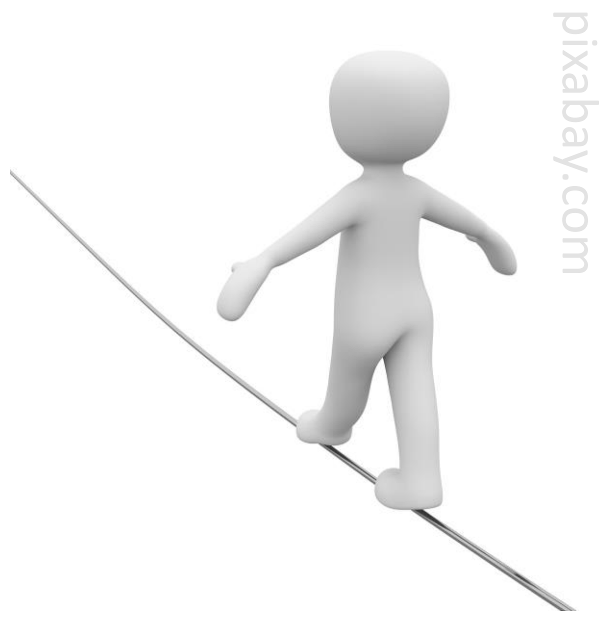
Aksjomat 3 Wypadkowa dwóch sił przechodzi przez punkt ich przecięcia i wyraża się długością przekątnej równoległoboku zbudowanego na tych siłach (jest wektorową sumą sił składowych).

Aksjomat 1 Dwie siły równoważą się wzajemnie jeżeli mają równe wartości (moduły), mają ten sam kierunek, ale są do siebie przeciwnie zwrócone.

Metodyka rozwiązywania zadań w statyce

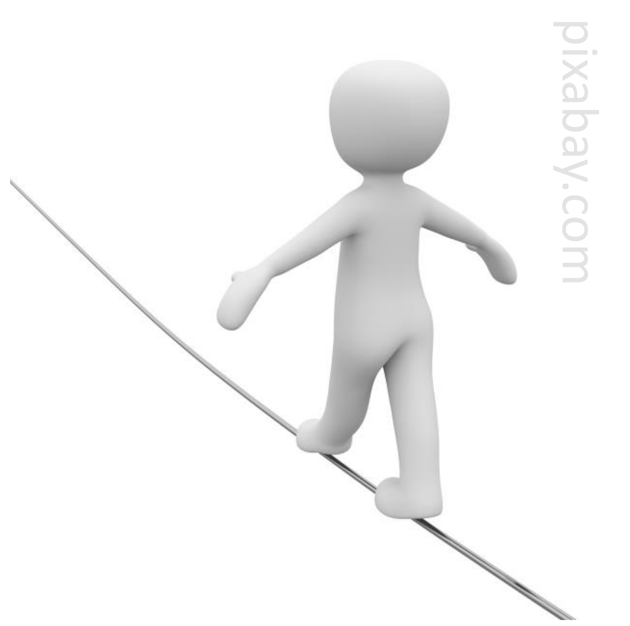
1. Wykonać rysunek układu do rozwiązania,
2. Nanieść układ współrzędnych,
3. Uwolnić badany układ od więzów (zastąpić więzy reakcjami),
4. Na układzie współrzędnych nanieść siły i reakcje,
5. Zapisać równania równowagi statycznej układu sił (równowaga sił, równowaga momentów),
6. Wyznaczyć nieznane wielkości.

Układy sił i ich równowaga



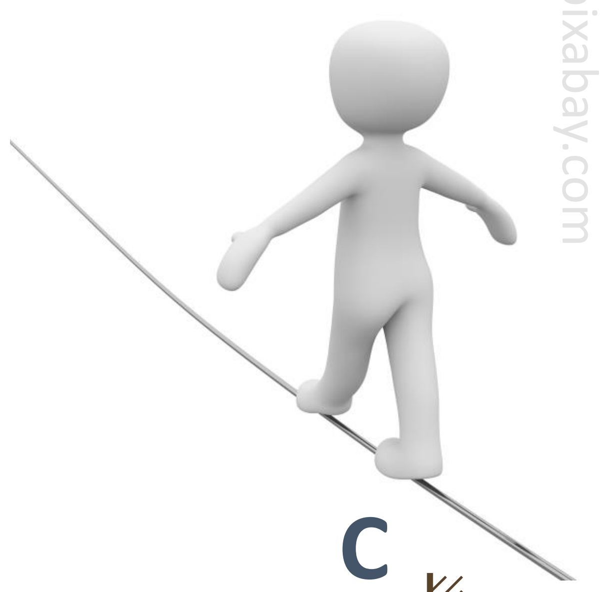
Przykład obliczyć napięcie hamaka, na którym siedzi dziewczyna o ciężarze $Q = 600\,N$.

Układy sił i ich równowaga

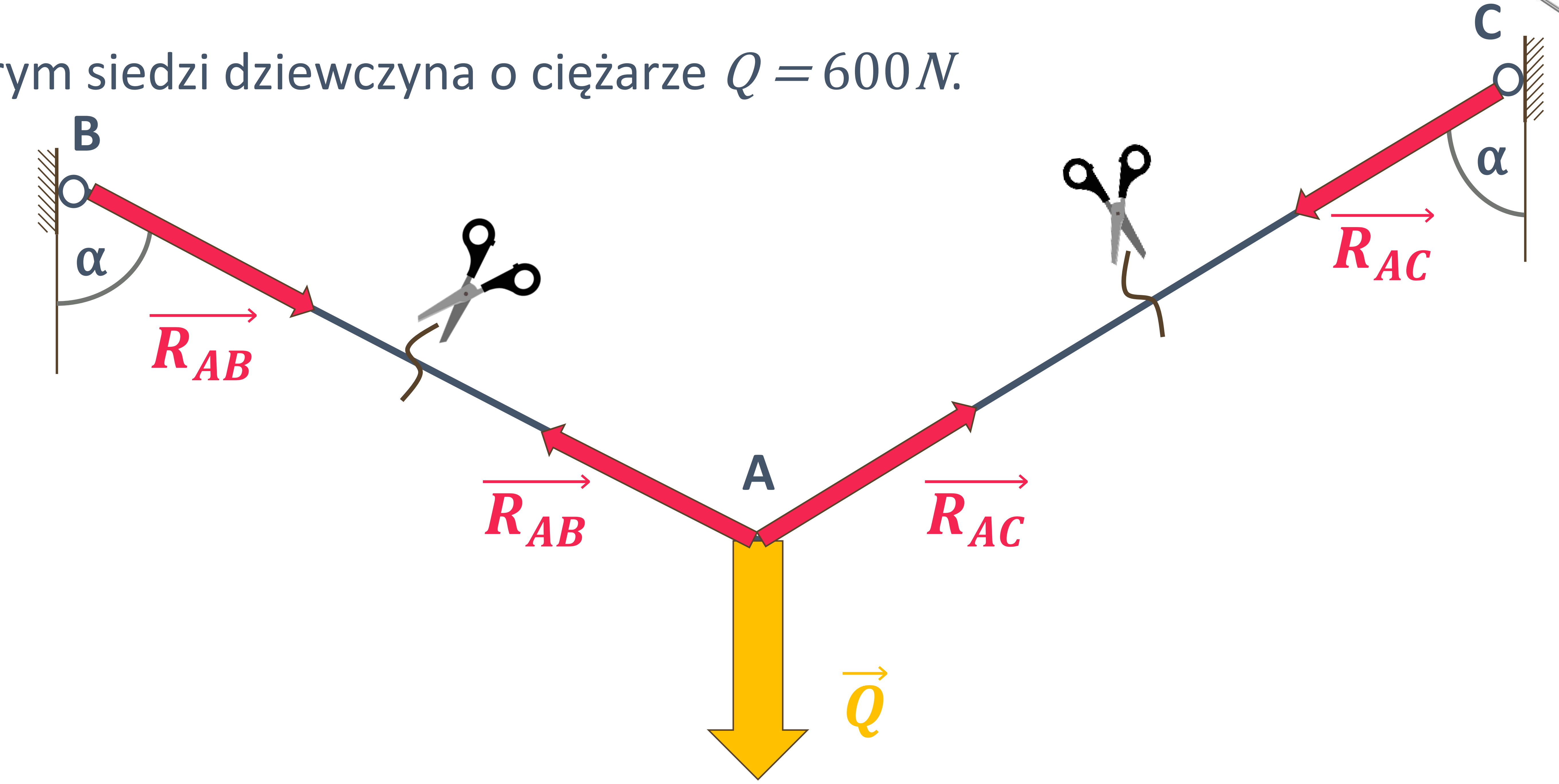


Przykład obliczyć napięcie hamaka, na którym siedzi dziewczyna o ciężarze $Q = 600 N$.

Układy sił i ich równowaga



Przykład obliczyć napięcie hamaka, na którym siedzi dziewczyna o ciężarze $Q = 600N$.



<u>Dane</u>

$Q = 600N$

$\alpha = 60°$

<u>Obliczyć</u>

R_{AC}, R_{AB}

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0, & \Rightarrow \overrightarrow{R_{ACx}} - \overrightarrow{R_{ABx}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{yi} = 0, & \Rightarrow \overrightarrow{R_{ACy}} + \overrightarrow{R_{ABy}} - \vec{Q} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AC} \cdot sin\alpha - R_{AB} \cdot sin\alpha = 0 \\ R_{AC} \cdot cos\alpha - R_{AB} \cdot cos\alpha - Q = 0 \end{cases}$$

$$R_{AC} = R_{AB}$$
$$R_{AC} \cdot cos\alpha - R_{AC} \cdot cos\alpha - Q = 0$$

$$2R_{AC} = Q$$
$$R_{AC} = {}^{Q}/_{2}$$

$$R_{AC} = {}^{600}/_{2} = 300N = R_{AB}$$